DM n° 1 – Suites et séries

Correction de l'exercice – Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. La fonction $g : x \mapsto \ln(1 + x^2) - x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = -\frac{1-2x+x^2}{1+x^2} = -\frac{(1-x)^2}{1+x^2} \leq 0.$$

Cette inégalité étant stricte, sauf au point $x = 1$, la fonction g est strictement décroissante. Comme elle est continue, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (les limites en $-\infty$ et $+\infty$ étant respectivement $+\infty$ et $-\infty$, données par le terme $-x$, le $\ln$ étant négligeable devant ce terme). Ainsi, 0 admet un unique antécédent par g . Donc, l'équation $x = \ln(1 + x^2)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Par ailleurs la valeur $x = 0$ est solution de cette équation, ainsi, d'après ce qui précède, c'est la seule solution.

2. Le logarithme étant croissant, pour tout $x > 0$, $\ln(1 + x^2) > \ln 1 = 0$. Ainsi, $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle stable par f . Comme $u_0 = a \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. La fonction g étant strictement décroissante et vérifiant $g(0) = 0$, pour tout $x > 0$, $g(x) < 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $u_n > 0$, on obtient $g(u_n) < 0$, donc $\ln(1 + u_n^2) - u_n < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle est convergente. La fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un point fixe de f , c'est-à-dire une solution de l'équation $g(x) = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. (a) On utilise dans cette question l'inégalité classique $\ln(1+t) \leq t$ (provenant de la concavité de $t \mapsto \ln(1+t)$, par comparaison avec la tangente en 0)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(\ln(1 + u_n^2)) \leq \ln(u_n^2) = 2 \ln u_n,$$

l'inégalité provenant de la remarque ci-dessus et de la croissance du logarithme.

- (b) Comme $u_n \rightarrow 0$, en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de la convergence, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n < 0 + \varepsilon = 1$. En itérant la relation précédente, il vient donc, pour tout $n > n_0$

$$\ln(u_n) \leq 2^{n-n_0} \ln(u_{n_0}) \quad \text{soit:} \quad \frac{\ln(u_n)}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} \ln(u_{n_0}) < 0.$$

Le majorant est une constante strictement négative. Ainsi, si $\left(\frac{\ln u_n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ℓ , cette limite vérifie

$$\ell \leq \frac{1}{2^{n_0}} \ln(u_{n_0}) < 0,$$

en particulier, elle ne peut pas être nulle.

5. (a) D'après la question 4(a), pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\ln(u_{n+1}) \leq 2 \ln(u_n).$$

En divisant cette inégalité par 2^{n+1} , il vient :

$$\frac{\ln(u_{n+1})}{2^{n+1}} \leq \frac{\ln(u_n)}{2^n}.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{\ln(u_n)}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- (b) La fonction $\ln$ étant de classe $\mathcal{C}^3$, on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. La dérivée 3-ième de $h : t \mapsto \ln(1 + t)$ sur $[0, 1]$ est donnée par :

$$\forall t \in [0, 1], \quad h^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3} > 0.$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall x \in]0, 1[, \quad h(x) - h(0) + h'(0)x + h''(0)x^2 \geq 0 \quad \text{soit:} \quad \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0.$$

(c) L'inégalité n'est vraie que pour n assez grand. En effet, pour appliquer la question précédente, il faut avoir que $u_n \in]0, 1[$, ce qui est le cas au moins à partir d'un certain rang (puisque $u_n \rightarrow 0$), mais pas nécessairement pour des petites valeurs de n .

Soit donc n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]0, 1[$.

Soit $n \geq n_0$. D'après l'inégalité précédente, et la croissance du logarithme, on a :

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(\ln(1 + u_n^2)) \geq \ln\left(u_n^2 - \frac{u_n^4}{2}\right) = \ln\left(u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{2}\right)\right) = \ln(u_n^2) + \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{2}\right).$$

On obtient bien

$$\forall n \geq n_0, \quad \ln(u_{n+1}) \geq 2 \ln(u_n) + \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{2}\right).$$

(d) Puisque (u_n) tend vers 0, $\ln\left(1 - \frac{u_n^2}{2}\right)$ tend vers 0 aussi, donc

$$\left|\frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{2}\right)\right| = o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Or, la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente en tant que série géométrique de paramètre $\frac{1}{2} \in]0, 1[$, et est positive. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries par négligeabilité, la série de terme général $\frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{2}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

Soit $n \geq n_0$. On a, pour tout $k \in \llbracket n_0, n-1 \rrbracket$,

$$\frac{\ln(u_{k+1})}{2^{k+1}} \geq \frac{\ln(u_k)}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1 - \frac{u_k^2}{2}\right).$$

En sommant ces inégalités, il vient :

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{\ln(u_{k+1})}{2^{k+1}} \geq \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{\ln(u_k)}{2^k} + \frac{1}{2} \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \ln\left(1 - \frac{u_k^2}{2}\right),$$

soit, après simplification des termes des deux premières sommes :

$$\frac{\ln(u_n)}{2^n} \geq \frac{\ln(u_{n_0})}{2^{n_0}} + \frac{1}{2} \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \ln\left(1 - \frac{u_k^2}{2}\right).$$

La série de terme général $\frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{u_k^2}{2}\right)$ étant convergente (et à termes négatifs), sa somme partielle converge, donc est bornée, et en particulier, elle est minorée. Ainsi, il existe une constante m telle que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{\ln(u_n)}{2^n} \geq \frac{\ln(u_{n_0})}{2^{n_0}} + m.$$

Ainsi, le minorant étant indépendant de n , la suite $\left(\frac{\ln(u_n)}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.

(e) Ainsi, $\left(\frac{\ln(u_n)}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Elle admet donc une limite finie ℓ . Cette limite est négative (car $\ln(u_n) < 0$ à partir d'un certain rang, puisque $u_n \rightarrow 0$). De plus elle est non nulle d'après la question 4(b). Ainsi, $\ell < 0$. Soit $b = e^\ell$. On a alors $b \in]0, 1[$, et $\frac{\ln(u_n)}{2^n} \rightarrow \ln(b)$ donc $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} 2^n \ln(b)$.

(f) Posons $c \in]b, 1[$ quelconque. On a alors

$$\frac{u_n}{c^{2^n}} = e^{\ln(u_n) - 2^n \ln(c)}.$$

Or, $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} 2^n \ln(b)$, donc $\ln(u_n) = 2^n \ln(b) + o(2^n)$, donc

$$\ln(u_n) - 2^n \ln(c) = 2^n (\ln(b) - \ln(c)) + o(2^n).$$

Comme $b \neq c$, $\ln(b) - \ln(c) \neq 0$, donc

$$\ln(u_n) - 2^n \ln(c) \underset{+\infty}{\sim} 2^n (\ln(b) - \ln(c)).$$

Enfin, par croissance de $\ln$, puisque $b < c$, on obtient $\ln(b) - \ln(c) < 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n (\ln(b) - \ln(c)) = -\infty.$$

Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{c^{2^n}} = 0$. On a donc (en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de la convergence) l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{u_n}{c^{2^n}} \leq 1$, donc $u_n \leq c^{2^n}$.

6. La série $\sum u_n^\alpha$ est à termes positifs, et ne diverge pas grossièrement puisque $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

On a, pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq u_n^\alpha \leq c^{2^n \alpha} \leq c^{2n\alpha},$$

puisque $2^n \geq 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et puisque $c < 1$. Or, $\sum c^{2n\alpha}$ est une série géométrique de raison $c^{2\alpha} \in]0, 1[$, donc elle est convergente. On déduit donc du théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum u_n^\alpha$ converge.

Correction du problème –

Partie I – Étude d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie implicitement

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions la fonction f_n . Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$, et y est dérivable, en tant que somme et quotient de fonctions dérivables. On pourra remarquer que sous la forme suivante, f_n est plus simple à dériver :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = e^{-x} - 1 + \frac{2n}{x+n} \quad \text{et} \quad f'_n(x) = -e^{-x} - \frac{2n}{(x+n)^2}.$$

Par conséquent, f'_n est strictement négative sur $\mathbb{R}_+$, donc f_n est strictement décroissante. De plus, on a $f_n(0) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -1$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	u_n	$+\infty$
$f'(x)$		–	–
$f(x)$	2		

Comme f_n est continue sur $[0, +\infty[$, et y est strictement décroissante, d'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image $]\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x), f_n(0)] =]-1, 2]$. Comme 0 est dans cet intervalle image, il admet un et un seul antécédent u_n par f_n . Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $f_n(n) = e^{-n} > 0$. Ainsi, $f_n(n) > f_n(u_n)$. Puisque f_n est décroissante, on en déduit que $n < u_n$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > n.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on en déduit, d'après le théorème de minoration, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(n+1) = e^{-(n+1)} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \left((2n+1)e^{-(n+1)} - 1 \right).$$

Or, d'après les croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)e^{-(n+1)} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((2n+1)e^{-(n+1)} - 1 \right) = -1$. Par conséquent, par définition de la limite, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $(2n+1)e^{-(n+1)} - 1 < 0$, puis $f_n(n+1) < 0$.

Alors, pour tout $n \geq N$, $f_n(n+1) < f_n(u_n)$, et f_n étant décroissante, on en déduit que $u_n < n+1$.

En combinant avec l'inégalité obtenue dans la question précédente, on obtient :

$$\forall n \geq N, \quad n < u_n < n+1 \quad \text{soit:} \quad 1 < \frac{u_n}{n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Les limites des termes encadrants sont toutes deux égales à 1, donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$, ce qui signifie que $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $e^{-u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - n + 1}{u_{n+1} + (n + 1)}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f_n(u_{n+1}) &= e^{-u_{n+1}} - \frac{u_{n+1} - n}{u_{n+1} + n} = \frac{u_{n+1} - (n + 1)}{u_{n+1} + (n + 1)} - \frac{u_{n+1} - n}{u_{n+1} + n} \\ &= \frac{(u_{n+1} - (n + 1))(u_{n+1} + n) - (u_{n+1} - n)(u_{n+1} + (n + 1))}{(u_{n+1} + (n + 1))(u_{n+1} + n)} = \frac{-2u_{n+1}}{(u_{n+1} + (n + 1))(u_{n+1} + n)}. \end{aligned}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} > n + 1 > 0$, on en déduit que $f_n(u_{n+1}) < 0$, donc $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$. Comme f_n est décroissante, il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} > u_n$. Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $f_n(u_n) = 0$ soit : $\frac{u_n - n}{u_n + n} = e^{-u_n}$ puis : $u_n - n = (u_n + n)e^{-u_n}$.

Comme $n < u_n < n + 1$, on obtient : $0 < u_n - n < (2n + 1)e^{-n}$.

Les théorèmes de croissances comparées permettent d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n + 1)e^{-n} = 0$, donc, d'après le théorème d'encadrement, $(u_n - n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n) = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

6. On a, d'après la relation définissant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_n}{2ne^{-n}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u_n}{n}\right) e^{-(u_n - n)}$.

Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$. De plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n) = 0$, par continuité de l'exponentielle,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(u_n - n)} = 1$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{2ne^{-n}} = 1$, puis que $a_n \underset{+\infty}{\sim} 2ne^{-n}$.

Partie II – Étude de séries dont le terme général est donné en fonction de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, puisqu'on peut élever un équivalent à une puissance fixe, $u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} n^\alpha$. Comme $\sum u_n^\alpha$ est à termes positifs, on peut appliquer le théorème de comparaison par équivalents : la série $\sum u_n^\alpha$ est de même nature que la série $\sum n^\alpha$.

Or, on reconnaît dans cette dernière série une série de Riemann de paramètre $-\alpha$. Elle est donc convergente si $\alpha < -1$ et divergente si $\alpha \geq -1$.

Par conséquent, $\sum u_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

2. (a) • Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, si $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha = +\infty$, donc $((-1)^n u_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0. De même, si $\alpha = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n u_n^\alpha = (-1)^n$, et cette suite ne tend pas vers 0. Ainsi, si $\alpha \geq 0$, la série $\sum (-1)^n u_n^\alpha$ est grossièrement divergente.
- Si $\alpha < -1$, puisque $\sum |(-1)^n u_n^\alpha| = \sum u_n^\alpha$ est convergente d'après la question précédente, on en déduit que $\sum (-1)^n u_n^\alpha$ est absolument convergente, donc convergente.
- Supposons maintenant que $-1 \leq \alpha < 0$. Alors, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante positive de limite $+\infty$, $(u_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante positive, de limite 0. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k^\alpha.$$

On a alors :

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1}^\alpha + (-1)^{2n+2} u_{2n+2}^\alpha = u_{2n+2}^\alpha - u_{2n+1}^\alpha \leq 0$, car $(u_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante ;

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2}^\alpha + (-1)^{2n+3} u_{2n+3}^\alpha = u_{2n+2}^\alpha - u_{2n+3}^\alpha \geq 0$, car $(u_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante ;

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1}^\alpha$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$.

Ainsi, $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et la limite de leur différence est 0. Par conséquent, $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Elles admettent donc une même limite ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, on a :

* $\exists N_1, \forall n \geq N_1, |S_{2n} - \ell| < \varepsilon$;

* $\exists N_2, \forall n \geq N_2, |S_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$;

Par conséquent : $\forall n \geq 2 \max(N_1, N_2), |S_n - \ell| < \varepsilon$.

On en déduit que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite ℓ , donc que $\sum (-1)^n u_n^\alpha$ converge.

Cette convergence n'est pas absolue d'après la question précédente, puisque si $\alpha \in [-1, 0[$, $\sum u_n^\alpha$ diverge. Ainsi, on a une semi-convergence.

En résumé :

- si $\alpha < -1$, $\sum (-1)^n u_n^\alpha$ converge absolument ;
- si $-1 \leq \alpha < 0$, $\sum (-1)^n u_n^\alpha$ est semi-convergente ;

- si $\alpha > 0$, $\sum (-1)^n u_n^\alpha$ diverge grossièrement.
- (b) Le raisonnement qu'on a fait pour $\alpha \in [-1, 0[$ serait bien sûr valable pour tout $\alpha < 0$. Alors, dans ce cas, $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc supérieure à sa limite $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha$, et de même, $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, donc inférieure à sa limite $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k^\alpha \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u_k^\alpha.$$

- (c) On déduit de la double-égalité précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\bullet \quad 0 \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u_k^\alpha - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u_k^\alpha - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k^\alpha,$$

$$\text{soit : } 0 \leq - \sum_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha \leq u_{2n+1}^\alpha,$$

$$\text{d'où : } \left| \sum_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha \right| \leq u_{2n+1}^\alpha,$$

$$\bullet \quad \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k u_k^\alpha \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u_k^\alpha.$$

$$\text{d'où : } 0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha - \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k u_k^\alpha \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u_k^\alpha - \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k u_k^\alpha,$$

$$\text{soit : } 0 \leq \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha \leq u_{2n}^\alpha,$$

$$\text{d'où : } \left| \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha \right| \leq u_{2n}^\alpha,$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha \right| \leq u_{n+1}^\alpha$. Donc, en appelant S la somme de la série,

$$|S - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k^\alpha \right| = O(u_{n+1}^\alpha) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

puisque $u_{n+1}^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$.

Partie III – Étude de séries dont le terme général est donné en fonction de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. (a) Si $x = 0$, la série $\sum a_n x^n$ converge trivialement (c'est une somme finie, constituée d'un seul terme). La convergence est bien sûr absolue!

Supposons que $x \neq 0$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant à termes non nuls, on peut considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le quotient :

$$\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \underset{+\infty}{\sim} x \cdot \frac{2(n+1)e^{-(n+1)}}{2ne^{-n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{e}.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{x}{e}$.

- Si $|x| < e$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{|x|}{e} < 1$. Soit $\ell \in \left] \frac{|x|}{e}, 1 \right[$. Par définition de la limite, en choisissant $\varepsilon = \ell - \frac{|x|}{e} > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq N, \quad \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| < \ell.$$

Alors, étant donné une telle valeur de N :

$$\forall n \geq N, \quad |a_{n+1} x^{n+1}| < \ell |a_n x^n|.$$

Soit, pour tout n dans $\llbracket N, +\infty \llbracket$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $|a_n x^n| \leq \ell^{n-N} |a_N x^N|$.
 $\mathcal{P}(N)$ est immédiat : $|a_N x^N| \leq |a_N x^N|$.
 Soit $n \in \llbracket N, +\infty \llbracket$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Alors :

$$|a_{n+1} x^{n+1}| < \ell |a_n x^n| \leq \ell \cdot \ell^{n-N} |a_N x^N| = \ell^{(n+1)-N} |a_N x^N|,$$

ce qui montre que dans ce cas, $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vérifié.

Par conséquent, $\mathcal{P}(N)$ est vraie, et pour tout n dans $\llbracket N, +\infty \llbracket$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\llbracket N, +\infty \llbracket$.

Ainsi, pour tout $n \geq N$, $|a_n x^n| \leq \frac{|a_N x^N|}{\ell^N} \cdot \ell^n$.

Or, puisque $\ell \in]0, 1[$, la série géométrique $\sum \ell^n$ converge, donc aussi $\sum \frac{|a_N x^N|}{\ell^N} \cdot \ell^n$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, les séries considérées étant à termes positifs, on en déduit que $\sum |a_n x^n|$ converge, donc que $\sum a_n x^n$ converge absolument (donc converge).

- Si $|x| \geq e$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n x^n| \geq |a_n e^n|.$$

Or, $|a_n e^n| \sim 2n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n e^n| = +\infty$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n x^n| = +\infty$. La suite $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admettant pas de limite nulle, on en déduit que $\sum a_n x^n$ est grossièrement divergente.

Récapitulons : $\sum a_n x^n$ converge absolument si $|x| < e$, et diverge grossièrement si $|x| \geq e$.

- (b) Soit $x \in]-e, e[$, et soit $y \in \left] \frac{|x|}{e}, 1 \right[$. On a :

$$\left| \frac{a_n x^n}{y^n} \right| \underset{+\infty}{\sim} \left| 2n e^{-n} \left(\frac{x}{y} \right)^n \right| = 2n \left(\frac{|x|}{ey} \right)^n.$$

Or, $0 \leq \frac{|x|}{ey} < 1$, donc d'après les croissances comparées, puisque pour tout $\alpha < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{\alpha n} = 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n e^{n \ln \left(\frac{|x|}{ey} \right)} = 0 \quad \text{soit:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \left(\frac{|x|}{ey} \right)^n = 0.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n x^n}{y^n} \right| = 0$, donc que $|a_n x^n| = o(y^n)$. Par conséquent :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq N, \quad |a_n x^n| \leq y^n.$$

Soit une telle valeur de N . Alors, pour tout $n \geq N$, et tout $m > n$, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k x^k| \leq \sum_{k=n+1}^m y^k,$$

puisque tous les indices k considérés vérifient $k \geq N$. Comme les séries $\sum a_k x^k$ et $\sum y_k$ convergent, on peut passer à la limite lorsque m tend vers $+\infty$ dans cette inégalité :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} y^k = \frac{y^{n+1}}{1-y}.$$

Pour ce passage à la limite, on a utilisé la continuité de la fonction « valeur absolue ».

- (c) On ne peut pas passer à la limite lorsque y tend vers $\frac{|x|}{e}$, car pour pouvoir faire ce passage à la limite, il faut le faire à n fixé, et il faudrait donc trouver un rang à partir duquel l'inégalité est vraie pour tout y (donc trouver un rang indépendant de y). Or, ce rang varie en fonction de y . Plus y s'approche de $\frac{|x|}{e}$, plus la convergence de $\left(\frac{a_n x^n}{y^n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ va être lente, et plus on devra prendre N grand.

D'ailleurs, ce passage à la limite est impossible, car si on pouvait le faire, on obtiendrait l'existence d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, (on suppose ici $x > 0$) :

$$R_n(x) = |R_n(x)| \leq \frac{\left(\frac{x}{e} \right)^{n+1}}{1 - \frac{x}{e}}.$$

Or, $(a_n e^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $a_n e^n > 1$. On obtient alors :

$$\forall n \geq N', 0 \leq a_n x^n > \left(\frac{x}{e}\right)^n, \quad \text{soit:} \quad R_n(x) > \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^k = \frac{\left(\frac{x}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{x}{e}},$$

d'où une contradiction. Faire le passage à la limite amène donc à une erreur.

2. On étudie maintenant la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{a_n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) Le raisonnement est le même que précédemment. Soit x tel que $|x| \neq \frac{1}{e}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{x^n}{a_n}$. Si $x = 0$, la série $\sum b_n$ est absolument convergente, puisque finie. Supposons donc $x \neq 0$. Dans ce cas, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite à termes tous non nuls, et $b_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(xe)^n}{2n}$. Ainsi :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(xe)^{n+1}(2n+1)}{(xe)^n \cdot 2n} \underset{+\infty}{\sim} xe.$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = xe$.

Par le même raisonnement que dans la question III-1a :

- si $|xe| < 1$, donc $|x| < \frac{1}{e}$, on peut majorer à partir d'un certain rang la suite $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par une suite géométrique de raison appartenant à $]0, 1[$, donc $\sum b_n$ est absolument convergente, donc convergente ;
- si $|xe| > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} > 1$, donc $|b_{n+1}| > |b_n|$. La suite $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante à partir du rang N , et on a :

$$\forall n \geq N + 1, |b_n| > |b_{N+1}| > |b_N| \geq 0.$$

Le réel strictement positif $|b_{N+1}|$ est donc un minorant de $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à partir du rang $N + 1$, ce qui empêche que $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et donc $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tendent vers 0. Ainsi, $\sum b_n$ est grossièrement divergente.

(b) Supposons que $x = \frac{1}{e}$. Alors : $\frac{x^n}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Or, la série $\sum \frac{1}{2n}$ est, à un coefficient multiplicatif près, une série de Riemann de paramètre 1, donc divergente. Les séries considérées étant à termes positifs, on en déduit, d'après le théorème de comparaison par équivalents, que $\sum \frac{x^n}{a_n}$ est divergente.

(c) D'après la relation définissant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 = e^{-u_n} - \frac{u_n - n}{u_n + n} \quad \text{soit:} \quad a_n = u_n - n = e^{-u_n}(u_n + n) = e^{-n}(u_n + n)e^{n-u_n}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - u_n = 0$, donc $e^{n-u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} n - u_n$, soit $e^{n-u_n} - 1 = n - u_n + o(n - u_n)$, d'où :

$$a_n = e^{-n}(u_n + n) \left(1 - (u_n - n) + o(u_n - n)\right) = e^{-n}(u_n + n)(1 - a_n + o(a_n)).$$

Ainsi, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = e^{a_n} - 1 = a_n + o(a_n)$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{a_n} = \frac{e^{a_n}}{(u_n + n)} \cdot \frac{1}{1 - b_n}.$$

Or, $\frac{1}{1 - b_n} - 1 = (1 - b_n)^{-1} - 1 \underset{+\infty}{\sim} b_n$, d'où $\frac{1}{1 - b_n} = 1 + b_n + o(b_n)$. Par conséquent :

$$\frac{1}{a_n} = \frac{e^{a_n}}{(u_n + n)} \cdot (1 + b_n + o(b_n)).$$

Comme $b_n = a_n + o(a_n)$, on a $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, donc un $o(b_n)$ est aussi un $o(a_n)$. On en déduit que :

$$\frac{1}{a_n} = \frac{e^{a_n}}{(u_n + n)} \cdot (1 + a_n + o(a_n)).$$

- (d) • La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante strictement positive, ainsi que $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Ainsi, $(u_n + n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et strictement positive, donc $\left(\frac{1}{u_n + n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + n \geq n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + n = +\infty$, puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + u_n} = 0.$$

Le même raisonnement que dans la question II-2a montre alors que si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne la somme partielle, alors $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, donc admettent une même limite ℓ . Le même raisonnement qu'en II-2a amène alors l'existence d'une limite pour $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, donc la convergence de

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{u_n + n}$$

Montrons que la convergence n'est pas absolue. En effet, $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$, donc $u_n = n + o(n)$, puis $u_n + n = 2n + o(n)$. Ainsi, $u_n + n \underset{+\infty}{\sim} 2n$. Par conséquent,

$$\left| \frac{(-1)^n}{u_n + n} \right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

La série $\sum \frac{1}{2n}$ converge, car, à un coefficient multiplicatif près, il s'agit d'une série de Riemann de paramètre 1. Les séries considérées étant à terme positif, on en déduit, à l'aide du théorème de comparaison par équivalents, que $\sum \left| \frac{(-1)^n}{u_n + n} \right|$ diverge, donc que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{u_n + n}$ ne converge pas absolument.

On est donc dans un cas de semi-convergence

- On a $a_n \underset{+\infty}{\sim} 2ne^{-n}$, donc $\left| \frac{(-1)^n a_n}{u_n + n} \right| \underset{+\infty}{\sim} e^{-n}$. Or, $\sum e^{-n}$ converge, en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{e} \in [0, 1[$. Ainsi, les séries étant à termes positifs, $\sum \left| \frac{(-1)^n a_n}{u_n + n} \right|$ converge d'après le théorème de comparaison par équivalents. Ainsi, $\sum \frac{(-1)^n a_n}{u_n + n}$ converge absolument, donc converge.

- (e) Lorsque $x = -\frac{1}{e}$, alors, d'après la question 2c,

$$\frac{x^n}{a_n} = \frac{(-1)^n}{(u_n + n)} + \frac{(-1)^n a_n}{u_n + n} + o\left(\frac{a_n}{u_n + n}\right).$$

Or :

- d'après la question précédente, $\sum \frac{(-1)^n}{(u_n + n)}$ converge ;
- d'après la question précédente, $\sum \frac{(-1)^n a_n}{u_n + n}$ converge.
- Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x^n}{a^n} - \frac{(-1)^n}{(u_n + n)} - \frac{(-1)^n a_n}{u_n + n} = o\left(\frac{a_n}{u_n + n}\right),$$

et que $\sum \frac{a_n}{u_n + n}$ converge d'après la question précédente (du fait de la convergence absolue !), on en déduit, d'après le théorème de comparaison par petit- o , que la série

$$\sum \left(\frac{x^n}{a^n} - \frac{(-1)^n}{(u_n + n)} - \frac{(-1)^n a_n}{u_n + n} \right)$$

converge absolument, donc converge.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{(-1)^n}{a^n e^n} = \left(\frac{(-1)^n}{a^n e^n} - \frac{(-1)^n}{(u_n + n)} - \frac{(-1)^n a_n}{u_n + n} \right) + \frac{(-1)^n}{(u_n + n)} + \frac{(-1)^n a_n}{u_n + n}.$$

Ainsi $\frac{1}{a^n e^n}$ est la somme des termes généraux de trois séries convergentes, donc $\sum \frac{(-1)^n}{a^n e^n}$ converge.