Correction du DM n° 10 : Algèbre bilinéaire

Correction de l'exercice 1 – (Exercice technique) Les questions sont indépendantes.

1. • La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est libre, comme on s'en assure facilement (vérification à faire rapidement dans une copie). On note e_1, e_2 et e_3 les 3 vecteurs de cette famille. Ils forment une base de F. On trouve une base orthonormale de F en artonormalisant cette famille. On note (f_1, f_2, f_3) la famille obtenue. Je ne donne pas les détails des calculs (à faire sur une copie). On trouve :

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{190}}\begin{pmatrix}1\\2\\11\\-8\end{pmatrix} \qquad f_3 = \frac{1}{2\sqrt{437}}\begin{pmatrix}33\\9\\-17\\-17\end{pmatrix}.$$

   • Un vecteur $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ est dans $F^\perp$ si et seulement s'il est orthogonal aux 3 vecteurs e_1, e_2 et e_3 de la base de F. Ces trois orthogonalités s'expriment par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + y - t &= 0 \end{cases}$$

   En résolvant ce système (exprimez tout en fonction de t), on trouve

$$X = \frac{t}{3}\begin{pmatrix}5\\-7\\3\\3\end{pmatrix}.$$

   Ainsi, $\left(\begin{pmatrix}5\\-7\\3\\3\end{pmatrix}\right)$ est une base de $F^\perp$, et en le divisant par sa norme, on obtient une base orthonormale : $\left(\frac{1}{2\sqrt{23}}\begin{pmatrix}5\\-7\\3\\3\end{pmatrix}\right)$.

2. On remarque tout d'abord que les vecteurs $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ du plan (qu'on note P) sont caractérisés par $X \perp \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

   Ainsi :

$$P^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}\right).$$

   Plusieurs méthodes sont possibles :

- Trouver une base de P l'orthonormaliser etc. C'est lourd en calculs (il faut orthonormaliser une famille de 3 vecteurs). Ce n'est pas conseillé ici.
- Utiliser la définition du projeté orthogonal d'un vecteur, donc la colinéarité de $X - P(X)$ et de $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui permet d'exprimer $P(X)$ en fonction de X et d'un scalaire λ, puis utiliser l'équation qui donne l'appartenance de $P(X)$ à P pour déterminer λ en fonction des coordonnées de X. Cela se fait, ce n'est pas très long.
- Le plus rapide ici est certainement de commencer par déterminer la matrice du projeté orthogonal q sur $P^\perp$, et d'utiliser la relation $p + q = \mathrm{id}$.

  Une base orthonormale de $F^\perp$ est $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ainsi, en notant (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$,

$$q(e_1) = \frac{1}{10}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

  Un calcul immédiat amène aussi :

$$q(e_2) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad q(e_3) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad q(e_4) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

  Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{bc}(q) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$\mathrm{Mat}_{bc}(q) = I_4 - \mathrm{Mat}_{bc}(p) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 9 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 9 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Soit $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, et soit $F = \mathrm{Vect}(b_1, b_2)$. Comme (b_1, b_2) est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre, et forme donc une base de F. Soit (f_1, f_2) l'othonormalisée de Schmidt de (b_1, b_2).
   - On a : $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   - Soit $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors : $f_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On calcule alors les projetés $p(e_1)$, $p(e_2)$, $p(e_3)$ et $p(e_4)$ des 4 vecteurs de la base canonique :

$$p(e_1) = \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{19}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\4\\1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}-1\\1\\4\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix}21\\17\\-8\\-2\end{pmatrix}.$$

On obtient de même :

$$p(e_2) = \frac{1}{38}\begin{pmatrix}17\\21\\8\\2\end{pmatrix}, \qquad p(e_3) = \frac{1}{38}\begin{pmatrix}-8\\8\\32\\8\end{pmatrix}, \qquad p(e_4) = \begin{pmatrix}-2\\2\\8\\2\end{pmatrix},$$

d'où l'expression de la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{bc}(p) = \frac{1}{38}\begin{pmatrix}21 & 17 & -8 & -2\\ 17 & 21 & 8 & 2\\ -8 & 8 & 32 & 8\\ -2 & 2 & 8 & 2\end{pmatrix}$$

4. En exprimant les coefficients diagonaux de ${}^tAB$ à l'aide des coefficients de A et de B, il vient immédiatement :

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

Cette expression permet de faire assez simplement les calculs de produits scalaires qui interviennent dans cette question.

Tour d'abord, en notant A et B les matrices de l'énoncé, et (C, D) la famille obtenue par orthonormalisation de la famille (A, B), on a :

$$C = \frac{A}{\|A\|} = \frac{1}{5}A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, soit

$$U = B - 125\,\langle B, A\rangle\, A = B - \frac{3}{25}A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}72 & -6 & -44 & 28\\ 19 & 50 & 0 & 19\\ -28 & 25 & 22 & 50\\ -50 & 19 & -25 & 28\end{pmatrix}$$

On a $\|U\| = \frac{1}{25}\sqrt{19825}$, d'où :

$$D = \frac{1}{5\sqrt{793}}\begin{pmatrix}72 & -6 & -44 & 28\\ 19 & 50 & 0 & 19\\ -28 & 25 & 22 & 50\\ -50 & 19 & -25 & 28\end{pmatrix}$$

On trouve alors le projeté orthogonal $p(I_4)$ avec un peu de patience, un peu de courage et une calculatrice...

$$p(I_4) = \langle I_4, C\rangle\, C + \langle I_4, D\rangle\, D = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{172}{19825}\begin{pmatrix}72 & -6 & -44 & 28\\ 19 & 50 & 0 & 19\\ -28 & 25 & 22 & 50\\ -50 & 19 & -25 & 28\end{pmatrix},$$

et, après quelques minutes de pianotage sur la calculatrice :

$$p(I_4) = \frac{1}{19825}\begin{pmatrix}13177 & 554 & 5982 & 4023\\ 4854 & 8600 & 0 & 4854\\ -4023 & 4300 & 4577 & 8600\\ -8600 & 4854 & -4300 & 4023\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 – (Ecricome 2007)

1. **(Question-archi-archi-classiquissime-à-savoir-faire-par-coeur-et-à-l'envers)**

   Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant 1,j\leqslant n}$, et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit ${}^tA = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et ${}^tAB = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On a alors

   $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad c_{i,j} = a_{j,i},$$

   par définition de la transposée. Ainsi, d'après l'expression des coefficients de la matrice produit :

   $$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2, \quad d_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} b_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{j,k}.$$

   Par conséquent,

   $$\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{j,i}.$$

   - Cette expression montre bien la symétrie et la bilinéarité de φ, par comuutativité du produit dans $\mathbb{R}$ et par linéarité de la somme. On aurait pu s'en sortir aussi matriciellement en constatant, pour la symétrie, que :

     $$\varphi(B,A) = \mathrm{tr}({}^tBA) = \mathrm{tr}({}^t({}^tBA)) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \varphi(A,B),$$

     du fait que **la trace est bien entendu invariante par transposition !** (propriété suffisamment importante pour être mise en valeur...) La bilinéarité ne pose pas davantage de problème.
   - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

     $$\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \geqslant 0,$$

     d'où la positivité.
   - De plus, si $\varphi(A,A) = 0$, comme $\varphi(A,A)$ s'exprime comme une somme de termes positifs, ces termes sont tous nuls, donc

     $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{j,i}^2 = 0 \qquad \text{donc:} \qquad a_{j,i} = 0.$$

     Ainsi, tous les coefficients de A sont nuls, donc $A = 0$. Donc φ est définie.

   L'application φ étant bilinéaire symétrique définie positive, c'est un produit scalaire.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette question est de prouver que $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

   (a) La matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle, puisque :

   $${}^t({}^tAA) = {}^tA \cdot {}^t({}^tA) = {}^tAA.$$

   Ainsi, elle est diagonalisable, et il existe une base orthonormale de vecteurs propres. Soit P la matrice de passage de la base canonique dans une telle base. Comme la base canonique est aussi orthonormale, P est une matrice orthogonale. La formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme f canoniquement associé à ${}^tAA$ s'écrit alors :

   $${}^tP({}^tAA)P = D,$$

   où D est la matrice de f dans une base constituée de vecteurs propres de f, donc D est diagonale.

   (b) On a :

   $${}^tX\,{}^tAAX = {}^tX(({}^tAA)X) = {}^tX(\lambda X) = \lambda \|X\|^2,$$

   où $\|-\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   De plus, on a aussi :

   $${}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX) \cdot AX = \|AX\|^2.$$

   Ainsi,

   $$\|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2 \qquad \text{donc:} \qquad \lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2},$$

   puisque $\|X\| \neq 0$ (puisque $X \neq 0$). Ainsi, $\lambda \geqslant 0$.

(c) Un première remarque. Pour tout matrice inversible P, et toute matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\operatorname{tr}(P^{-1}(CP)) = \operatorname{tr}((CP)P^{-1}) = \operatorname{tr}(C),$$

d'après les rappels faits sur la trace dans le préambule de l'exercice. Ainsi, puisque la matrice P considérée dans cet exercice est orthogonale et vérifie donc $P^{-1} = {}^tP$, on a :

$$\operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}({}^tP({}^tAA)P) = \operatorname{tr}({}^tAA) = \varphi(A, A) = N(A)^2,$$

et de même,

$$\operatorname{tr}(S) = \operatorname{tr}({}^tP(B\,{}^tB)P) = \operatorname{tr}(B\,{}^tB) = \operatorname{tr}({}^tBB) = \varphi(B, B) = N(B)^2,$$

d'après la formule du préambule (commutation des matrices à l'intérieur de la trace). De plus,

$$N(AB) = \operatorname{tr}({}^t(AB)(AB)) = \operatorname{tr}({}^tB\,{}^tAAB) = \operatorname{tr}(B\,{}^tB\,{}^tAA),$$

toujours d'après la formule de commutation des matrices à l'intérieur de la trace. Ainsi, d'après le début de la question,

$$N(AB) = \operatorname{tr}({}^tPB\,{}^tB\,{}^tAAP) = \operatorname{tr}({}^tPB\,{}^tBP\,{}^tP\,{}^tAAP) = \operatorname{tr}(SD)$$

puisque $P\,{}^tP = I_n$.

(d) Soit $SD = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors

$$\forall (i, k) \in [\![1, n]\!]^2, \quad t_{i,k} = \sum_{j=0}^{n} s_{i,j}d_{j,k} = s_{i,k}d_{k,k} = s_{i,k}\lambda_k,$$

puisque seuls les coefficients diagonaux de D sont non nuls. Ainsi

$$\operatorname{tr}(SD) = \sum_{i=1}^{n} t_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} s_{i,i}\lambda_i.$$

(e) On a :

$${}^tE_iSE_i = {}^tE_i\,{}^tPB\,{}^tBPE_i = {}^t({}^tBPE_i)\cdot({}^tBPE_i) = \|\,{}^tBPE_i\|^2.$$

De plus, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$${}^tE_iSE_j = s_{i,j}, \qquad \text{donc:} \qquad {}^tE_iSE_i = s_{i,i}$$

ainsi, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad s_{i,i} = \|\,{}^tBPE_i\|^2 \geqslant 0.$$

(f) Les $s_{i,i}$, $i \in [\![1, n]\!]$ et les λ_i, $i \in [\![1, n]\!]$ (qui sont les valeurs propres de A) sont tous positifs, d'après les questions 2(b) et 2(e). Ainsi :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{i,i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i s_{j,j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_i s_{j,j} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i}.$$

D'après 2(d), cela se réécrit :

$$\operatorname{tr}(SD) \geqslant \operatorname{tr}(S)\operatorname{tr}(D),$$

et d'après la question 2(c), il en résulte que :

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

Correction du problème – (EDHEC 2000)

Partie I –

1. (a) J est symétrique réelle, donc diagonalisable.

   (b) Posons $J = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, les $\alpha_{i,j}$ étant tous égaux à 1. Posons $J^2 = (\beta_{i,j})_{A\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \beta_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\alpha_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

   Ainsi, J^2 est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à n, donc $J^2 = nJ$.

   On pouvait aussi faire ce calcul par considération des colonnes, chaque colonne de J^2 étant obtenue comme combinaison linéaire des colonnes de J, les coefficients étant donnés par les coefficients de la colonne correspondante de J (donc tous égaux à 1). Ainsi, chaque colonne de J^2 est la somme de toutes les colonnes de J, donc n fois la colonne constituée de 1.

   Ainsi, $X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de J. On a donc :

$$\mathrm{Sp}(J) \subset \mathrm{rac}(X^2 - nX) = \{0, n\}.$$

   - Comme les colonnes de J sont liées (elles sont deux à deux colinéaires !), J n'est pas inversible, donc $0 \in \mathrm{Sp}(J)$
   - On a $J\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = n\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$,, donc $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à n, donc $n \in \mathrm{Sp}(J)$.

   On a donc $\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$.

2. (a) De plus, $\mathrm{rg}(J) = 1$ puisque ses colonnes sont deux à deux colinéaires. Donc le sous-espace propre E_0 associé à la valeur propre 0 est de dimension $n-1$ (d'après le théorème du rang). Comme $\dim E_n \geqslant 1$, on obtient :

$$\dim E_0 + \dim E_n \geqslant n,$$

   et la somme des dimensions des sous-espaces propres ne pouvant excéder la dimension totale, cette inégalité est une égalité. Il en résulte que J est diagonalisable, et $\dim E_n = 1$. Soit $(b_1, \cdots b_{n-1})$ une base de E_0, et (b_n) une base de E_n. Alors $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de $E = \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à J. Sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

   De plus, $M_a = aJ + (1-a)I$. Ainsi $af + (1-a)\mathrm{id}$ est l'endomorphisme canoniquement associé à M_a. Or, la matrice de $af + (1-a)\mathrm{id}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(af + (1-a)\mathrm{id}) = a\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + (1-a)I_n = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1-a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1+(n-1)a \end{pmatrix}$$

   Ainsi, les valeurs propres de M_a sont $1-a$ et $1+(n-1)a$, ces deux valeurs propres étant distinctes puisque $n \neq 0$.

   (b) M_a est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(M_a)$, donc si et seulement si $a - 1 \neq 0$ et $1 + (n-1)a \neq 0$, donc si et seulement si

$$a \neq 1 \qquad \text{et} \qquad a \neq -\frac{1}{n-1}.$$

3. Ici, $n = 4$.

(a) D'après les questions précédentes, $\dim E_0 = n-1 = 3$. De plus les colonnes de J vérifient les relations :

$$C_1 - C_2 = 0, \qquad C_1 - C_3 = 0, \qquad C_1 - C_4 = 0.$$

Ainsi, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans E_0. Il forment une famille libre puisqu'ils forment une famille échelonnée par rapport à leur dernière coordonnée non nulle. Ainsi, la dimension de E_0 étant 3, ils forment une base de E_0.

(b) Notons (e_1, e_2, e_3) la base de E_0 de la question précédente. Comme il s'agit d'une famille libre, on peut lui appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Soit (b_1, b_2, b_3) la famille orthonormale (qui sera, d'après les dimensions, une b.o.n. de E_0) obtenue de (e_1, e_2, e_3) à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

- On a $b_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Le vecteur b_2 s'exprime :

$$b_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}, \qquad \text{où} \qquad u_2 = e_2 - \langle e_2, b_1 \rangle\, b_1.$$

On a :

$$\langle e_2, b_1 \rangle\, b_1 = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\|u_2\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, d'où :

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Le vecteur b_2 s'exprime :

$$b_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}, \qquad \text{où} \qquad u_3 = e_3 - \langle e_3, b_1 \rangle\, b_1 - \langle e_3, b_2 \rangle\, b_2.$$

On a :

$$\langle e_3, b_1 \rangle\, b_1 = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\langle e_3, b_2 \rangle\, b_2 = \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ainsi,

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\|u_3\| = \frac{\sqrt{12}}{3}$, donc

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Une vérification rapide montre bien l'orthogonalité de la famille (b_1, b_2, b_3) obtenue, ce qui confirme les calculs.

(c) On sait que $\dim E_n = \dim E_4 = 1$, et que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé, dont la norme vaut 2.

Ainsi, posons

$$b_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une vérification sans dificulté montre que $b_1 \perp b_4$, $b_2 \perp b_4$ et $b_3 \perp b_4$. Comme de plus (b_1, b_2, b_3) est une famille orthonormale, et que $\|b_4\| = 1$, on en déduit que (b_1, b_2, b_3, b_4) est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^4$. Son cardinal étant 4, et par liberté des familles orthonormales, on en déduit que c'est une b.o.n. de $\mathbb{R}^4$. Cette b.o.n. est formée de vecteurs propres de J, b_1, b_2, b_3 étant associés à la valeur propre 0, et b_4 étant associé à la valeur propre 4.

Partie II –

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$.

(a) On a

$$M_a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = aJ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + (1-a)I \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = a(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + (1-a) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + a\lambda_2 + \dots + a\lambda_n \\ a\lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 + \dots + a\lambda_n \\ \vdots \\ a\lambda_1 + \dots + a\lambda_{n-1} + \lambda_n \end{pmatrix}$$

Or, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = 0$, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$0 = \left\langle u_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle.$$

Or, d'après l'énoncé, pour tout $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = a$, et $\langle u_i, u_i \rangle = 1$, car les u_i sont unitaires. Ainsi

$$0 = \lambda_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a\lambda_j.$$

C'est le coefficient de la ligne i de $M_a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Par conséquent, $M_a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est nul.

(b) Supposons que $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{1}{n-1}$. Alors M_a et inversible, et la relation précédente équivaut à $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre. Comme il s'agit d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, le cardinal de cette famille libre est au plus égal à 3, donc $n \leqslant 3$.

2. **Étude du cas** $a = 1$

(a) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$,

$$\| \langle u_i, u_j \rangle \| \leqslant \|u_i\| \cdot \|u_j\|.$$

On a égalité si et seulement si u_i et u_j sont colinéaires

(b) Or, si $a = 1$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j$, on a $\langle u_i, u_j \rangle = 1 = \|u_i\| \cdot \|u_j\|$, les vecteurs étant unitaires. Ainsi, les u_i sont deux à deux colinéaires. Comme ils sont unitaires, ils sont non nuls, et par conséquent,

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad u_i = \lambda_i u_1.$$

De plus,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad 1 = a = \langle u_i, u_1 \rangle = \lambda_i \langle u_1, u_1 \rangle = \lambda_i,$$

donc pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\lambda_i = 1$, donc $u_i = u_1$. Or, l'énoncé stipule que les u_i doivent être deux à deux distincts, ce qui n'est possible que si la famille des u_i n'est constitué que d'un vecteur. Ainsi, $n = 1$.

3. Dans cette question, on admet qu'il existe une famille (u_1, u_2, u_3, u_4) formée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, solution du problème.

(a) D'après les questions 1 et 2 de la partie II, ceci est impossible, sauf si $a = -\frac{1}{n-1}$. S'il existe une telle famille, alors nécessairement,

$$a = -\frac{1}{n-1} = -\frac{1}{3},$$

puisque $n = 4$ ici.

(b) Montrons que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0.$$

En appliquant successivement le produit scalaire avec u_1, u_2 et u_3, on obtient le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 & = & 0 \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 & = & 0 \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_3 + \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Un calcul rapide montre que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (on pourra par exemple remarquer qu'en sommant les trois lignes, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, et qu'en ajoutant un tiers de cette expression à chaque ligne, on obtient directement λ_1, λ_2 et λ_3).

Ainsi, (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Le vecteur u_4 se décompose donc dans cette base : il existe μ_1, μ_2 et μ_3 des réels tels que

$$u_4 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3.$$

En appliquant successivement le produit scalaire avec u_1, u_2, u_3 et u_4, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 & = & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 & = & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_3 + \lambda_3 & = & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

La dernière équation s'obtient d'ailleurs comme somme des trois premières. Ainsi, en retranchant cette dernière équation aux trois autres, il vient :

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{4}{3}\lambda_1 & = & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3}\lambda_2 & = & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3}\lambda_3 & = & -\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Ainsi, le vecteur colonne des coordonnées de u_4 dans la base (u_1, u_2, u_3) est $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En fait, le problème étant symétrique en u_1, u_2, u_3 et u_4, cela signifie que ces 4 vecteurs forment un tétraèdre régulier.

Partie III –

1. Trop facile ! $a = 0$ équivaut à l'orthogonalité de la famille (et même l'orthonormalité, les vecteurs étant supposés unitaires). Ainsi, la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ convient.

2. On pose $v_1 = e_1$, $v_2 = -\dfrac{1}{2}e_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $v_3 = -\dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$.

   (a) On a :
   $$\|v_1\|^2 = 1, \qquad \|v_2\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, \qquad \|v_3\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$$
   donc les vecteurs sont unitaires. De plus,
   $$\langle v_1, v_2 \rangle = -\frac{1}{2}, \qquad \langle v_1, v_3 \rangle = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \langle v_2, v_3 \rangle = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.$$
   Ainsi, (v_1, v_2, v_3) est solution du problème avec $a = -\frac{1}{2}$

   (b) On a :
   $$\langle e_3, \lambda v_1 + \mu e_3 \rangle = \mu = \langle e_3, \lambda v_2 + \mu e_3 \rangle = \langle e_3, \lambda v_3 + \mu e_3 \rangle,$$
   car e_3 est orthogonal à e_1 et e_2, donc à v_1, v_2 et v_3. Ainsi, on doit avoir $\mu = a = -\frac{1}{3}$.
   De plus,
   $$-\frac{1}{3} = \langle \lambda v_1 + \mu e_3, \lambda v_2 + \mu e_3 \rangle = \lambda^2 \langle v_1, v_2 \rangle + \mu^2 = -\frac{1}{2}\lambda^2 + \mu^2.$$
   Ainsi,
   $$\lambda^2 = 2\frac{4}{9}, \qquad \text{donc:} \qquad \lambda = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$
   On vérifie faciement que les deux choix de signe conviennent. On pose par exemple $\lambda = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. La famille considérée est donc :
   $$\left(e_3, \frac{2}{3}\sqrt{2}v_1 - \frac{1}{3}e_3, \frac{2}{3}\sqrt{2}v_2 - \frac{1}{3}e_3, \frac{2}{3}\sqrt{2}v_3 - \frac{1}{3}e_3\right)$$
   On vérifie facilement que cette famille est solution du problème. Pour calculer les normes, on remarquera que $e_3 \perp v_i$, donc
   $$\|\frac{2}{3}\sqrt{2}v_i - \frac{1}{3}e_3\|^2 = \frac{8}{9} + \frac{1}{3} = 1.$$