

DM n° 10 bis : Algèbre bilinéaire

DEVOIR FACULTATIF RÉSERVÉ AUX ÉLÈVES PRÉPARANT LES PARISIENNES

9
Correction du problème – (d'après ESSEC 99 Math I)

Préliminaire : Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

1. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Le coefficient en position (i, i) du produit AB est :
$$\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,i}.$$
Donc
$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} b_{j,i} a_{i,j} = \mathrm{tr}(BA).$$

2. Soit M et M' deux matrices semblables. Il existe donc P tel que $M' = P^{-1}MP$. Ainsi,
$$\mathrm{tr}(M') = \mathrm{tr}(P^{-1}(MP)) = \mathrm{tr}((MP)P^{-1}) = \mathrm{tr}\, M,$$
la deuxième égalité provenant de la question précédente.

Partie I – Étude des éléments de $T(E)$

1. **Sous-espace orthogonal à un vecteur non nul de E**

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$v - \lambda x \perp x \iff \langle v - \lambda x, x\rangle = 0 \iff \langle v, x\rangle - \lambda\|x\|^2 = 0 \iff \lambda = \frac{\langle v, x\rangle}{\|x\|^2},$$
   x étant non nul. Ainsi, on a existence et unicité de $\lambda(v)$, et $\boxed{\lambda(v) = \frac{\langle v, x\rangle}{\|x\|^2}.}$

   (b) • On a, pour tout $v \in E$, $v = \lambda(v)x + (v - \lambda(v)x)$. Or, $\lambda(v)x \in \mathbb{R}x$ et $v - \lambda(v)x \in (\mathbb{R}x)^\perp = X$, par définition de $\lambda(v)$. Ainsi, $v \in \mathbb{R}x + X$. On en déduit que $E \subset \mathbb{R}x + X$. L'inclusion réciproque étant immédiate, on en déduit que $E = \mathbb{R}x + X$.
   • Soit $y \in \mathbb{R}x \cap X$. Alors il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$, et comme $y \perp x$, on a $\lambda \langle x, x, \rangle = 0$, donc $\lambda = 0$ (car $x \neq 0$, donc $\|x\|^2 \neq 0$). Ainsi, $y = 0$. Par conséquent, $\mathbb{R}x \cap X \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque étant évidente, on en déduit que $\mathbb{R}x \cap X = \{0\}$.

   Par conséquent, $\boxed{\mathbb{R}x \oplus X = E}$.

2. **Élément de $T(E)$ associé à un vecteur de E.**

   (a) • u_x est une application linéaire. En effet, soit $(u, v) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par bilinéarité du produit scalaire,
$$u_x(\lambda u + v) = \langle x, \lambda u + v\rangle\, x = \lambda \langle x, u\rangle\, x + \langle x, v\rangle\, x = \lambda u_x(u) + u_x(v).$$
   Comme u_x est une application de E dans lui-même, on en déduit que u_x est un endomorphisme de E.

- u_x est un endomorphisme symétrique. En effet, soit (y,z) dans E^2. On a :

$$\langle u_x(y), z\rangle = \langle \langle x,y\rangle x, z\rangle = \langle x,y\rangle \langle x,z\rangle \qquad \text{et} \qquad \langle y, u_x(z)\rangle = \langle y, \langle x,z\rangle, x\rangle = \langle y,x\rangle \langle x,z\rangle .$$

  Ainsi, le produit scalaire étant symétrique, on a $\langle u_x(y), z\rangle = \langle y, u_x(z)\rangle$. Ceci étant vrai pour tout $(y,z) \in E^2$, $\boxed{u_x \text{ est un endomorphisme symétrique de } E}$.
- On a clairement $\mathrm{Im}(u_x) \subset \mathbb{R}x$, donc

$$\mathrm{rg}(u_x) = \dim \mathrm{Im}(u_x) \leqslant \dim \mathbb{R}x = 1.$$

  Donc u_x est de rang au plus 1.
- Enfin, soit $y \in E$, on a

$$\langle u_x(y), y\rangle = \langle \langle x,y\rangle x, y\rangle = \langle x,y\rangle^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, $\boxed{u_x \in T(E).}$

Soit $b_1 = x$. Alors (b_1) est une base de $\mathbb{R}x$. Comme $\mathbb{R}x$ et X sont supplémentaires dans E, X est de dimension $p-1$. Soit $(b_2, \dots, b_p)$ une base de X. Comme $\mathbb{R}x$ et X sont supplémentaires dans E, $(b_1, \dots, b_p)$ est donc une base de E. On a :
- $u_x(b_1) = u_x(x) = \langle x,x\rangle x = \|x\|^2 x$,
- pour tout $i \in [\![2,p]\!]$, $b_i \perp x$ donc $u_x(b_i) = \langle x, b_i\rangle x = 0$.

Ainsi, la matrice de u_x relativement à la base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$ est :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_x) = M = \begin{pmatrix} \|x\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ot, $\mathrm{tr}(u_x) = \mathrm{tr}(M)$, donc $\boxed{\mathrm{tr}(u_x) = \|x\|^2.}$

De plus, la matrice de $u_x \circ u_x$ relativement à la même base est M^2, constituée d'un coefficient $\|x\|^4$ en position $(1,1)$ et de 0 partout ailleurs. Ainsi $\boxed{\mathrm{tr}(u_x \circ u_x) = \|x\|^4}$.

(b) La matrice M de u_x dans la base $(b_1, \dots, b_p)$ est diagonale. Donc les valeurs propres de u_x sont les coefficients diagonaux de cette matrice, à savoir :
- $\lambda = \|x\|^2 > 0$, l'espace propre associé étant $E_{\|x\|^2} = \mathrm{Vect}(b_1) = \mathbb{R}x$;
- si $p > 1$, $\lambda = 0$, l'espace propre associé étant $E_0 = \mathrm{Vect}(b_2, \dots, b_p) = X$.

Ainsi :
- $\boxed{\text{si } p = 1,\ u_x \text{ a une unique valeur propre } \|x\|^2, \text{ d'espace propre associé } \mathbb{R}x}$, égal à E dans ce cas-là.
- $\boxed{\text{Si } p > 2,\ u_x \text{ a deux valeurs propres, 0 et } \|x\|^2, \text{ d'espaces propres associés respectifs } X \text{ et } \mathbb{R}x.}$

(c) On a :
- $f \circ u_x(b_1) = f(\|x\|^2 x) = \|x\|^2 f(x) = \|x\|^2 (\lambda(f(x))x + (f(x) - \lambda(f(x))x))$.
  Or, $(f(x) - \lambda(f(x))x) \in X = \mathrm{Vect}(b_2, \dots, b_n)$, donc la coordonnée sur le vecteur b_1 de $f \circ u_x(b_1)$ est

$$\|x\|^2 \lambda(f(x)) = \|x\|^2 \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} = \langle f(x), x\rangle .$$

- pour tout $i \in [\![2,p]\!]$,

$$f \circ u_x(b_i) = f(0) = 0,$$

  puisque f est une application linéaire.

Ainsi, la diagonale de la matrice de $f \circ u_x$ relativement à $(b_1, \dots, b_p)$ est constitué d'un coefficient $\langle f(x), x\rangle$, puis de zéros. Constatez que lorsque $f = \mathrm{id}$, cela est compatible avec le résultat trouvé pour la matrice de u_x.

On déduit de cela que $\boxed{\mathrm{tr}(f \circ u_x) = \langle f(x), x\rangle.}$

3. **Vecteurs de E associés à un élément de $T(E)$.**

(a) $\operatorname{Im} u$ est bien une droite, puisque sa dimension est au plus 1 (car $u \in T(E)$) et est non nulle (car u n'est pas nul). Ainsi, x étant un élément non nul de $\operatorname{Im}(u)$, on obtient $\operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}x$. Alors, puisque $u(x) \in \operatorname{Im}(u)$. Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \mu x$, et x étant non nul, $\boxed{x \text{ est donc un vecteur propre de } u}$, associé à une certaine valeur propre $\mu\cdot$

De plus, par définition de $T(E)$, pour tout x de E, $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$, donc $\langle \mu x, x\rangle \geqslant 0$, donc $\mu\|x\|^2 \geqslant 0$. Comme $x \neq 0$, on a $\|x\|^2 > 0$, d'où $\boxed{\mu \geqslant 0}$. On a même $\boxed{\mu > 0}$, sinon, $u(x) = 0$, et dans ce cas, on obtiendrait $u = 0$.

(b) Soit $v \in E$. Alors

$$u(v) = u(\lambda(v)x + (v - \lambda(v)x)) = \lambda(v)u(x) + u(v - \lambda(v)x).$$

Or, puisque $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension 1, d'après la formule du rang, $\operatorname{Ker}(u)$ est de dimension $p-1$ et est le seul autre espace propre de u (associé à la valeur propre 0) : il ne peut y avoir d'autre valeur propre, pour des raisons de dimension. Toujours pour des raisons de dimension, l'espace propre associé à $\mu > 0$ est de dimension au plus 1, donc, du fait de l'inclusion $\operatorname{Im} u \subset E_\mu$, on en déduit l'égalité $\operatorname{Im}(u) = E_\mu$.

Comme u est symétrique, il est diagonalisable et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux, de somme (directe) égale à E. Ainsi, $\operatorname{Im}(u) = E_\mu$ et $\operatorname{Ker} u = E_0$ sont supplémentaires orthogonaux. De plus, $v - \lambda(v)x$ est orthogonal à $\mathbb{R}x$, par définition de $\lambda(v)$. Par conséquent,

$$v - \lambda(v)x \in (\mathbb{R}x)^\perp = \operatorname{Ker} u \qquad \text{donc:} \qquad u(v - \lambda(v)x) = 0.$$

On en déduit que :

$$u(v) = \lambda(v)u(x) = \lambda(v)\mu x, \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{u(v) = \frac{\mu}{\|x\|^2}\langle x, v\rangle\, x.}$$

(c) Posons $y = \sqrt{\mu}\cdot\frac{x}{\|x\|} \neq 0$. Alors, pour tout $v \in E$,

$$u(v) = \left\langle \frac{\sqrt{\mu}\cdot x}{\|x\|}, v\right\rangle \frac{\sqrt{\mu}\cdot x}{\|x\|} = \langle v, y\rangle\, y = u_y(v).$$

Ainsi, $\boxed{\text{il existe } y \in E \text{ tel que } u = u_y.}$

(d) Notons Φ l'application définie dans l'énoncé.

- La question précédente affirme que $\boxed{\Phi \text{ est surjective}}$ (tout élément u de $T(E)$ admet un antécédent y par Φ, tel que $u_y = u$).
- $\boxed{\Phi \text{ n'est pas injective}}$ en revanche. Soit en effet $x \neq 0$ dans E. Alors, de manière évidente on a $u_x = u_{-x}$ alors que $x \neq -x$.

Partie II – Approximation des éléments de $S(E)$ par des éléments de $T(E)$

1. **Programmation**

```
{ENTETE, NON DEMANDE}

program dm3_2008;


{QUESTION a}

type matrice=array[1..4,1..4] of real;


{NON DEMANDE: declaration de variables pour l'essai final}

var A,B,C:matrice;
```

```
    i,j:integer;
    traceBC:real;
    sym:boolean;

{QUESTION b}

function symetrique(M:matrice):boolean;

  var  i,j:integer;

  begin
      {initialisation}
    symetrique:=true;
      {on modifie cette valeur si on trouve une contradiction
       à la symétrie}
    for i:=1 to 4 do
      for j:=i+1 to 4 do   {test sur un triangle}
        if M[i,j] <> M[j,i] then symetrique:=false;
  end;

{QUESTION b, AUTRE SOLUTION}

function symetrique2(M:matrice):boolean;

  var i,j:integer;
      b:boolean;

  begin
    b:=true;
    for i:=1 to 4 do
      for j:=i+1 to 4 do
        b:= b and (M[i,j] = M[j,i]);
          {si à un moment, le test M[i,j]=M[j,i] est faux, b prend la
          valeur false, et garde cette valeur jusqu'à la fin}
    symetrique2:=b;
  end;

{QUESTION c}

procedure trace(A,B:matrice; var sym:boolean; var traceAB: real);

  var i,j:integer;
      t:real;

  begin
    sym:= symetrique(A) and symetrique(B);
          {sym prend la valeur true ssi symetrique(A) et symetrique(B)
          prennent toutes deux la valeur true}
    t:=0;
    for i:=1 to 4 do
      for j:=1 to 4 do
```

```
      t:= t + A[i,j]*B[j,i];
    traceAB:=t;
  end;

{NON DEMANDE: ESSAIS}

begin

       {definition de A, dont les coefficients lus ligne par ligne
        sont les entiers de 1 à 16}
  for i:=1 to 4 do
    for j:=1 to 4 do
      A[i,j]:= 4*(i-1)+j;
       {définition de B, dont les coefficients sont
        1 2 3 4  2 3 4 5  3 4 5 6  4 5 6 7}
  for i:=1 to 4 do
    for j:=1 to 4 do
      B[i,j]:= i+j-1;
       {définition de la matrice C, composée d'équerres de 1, 2, 3 et 4}
  for i:=1 to 4 do
    for j:=i to 4 do
      begin
        C[i,j]:=i;
        C[j,i]:=i;
      end;

  {ESSAIS DE SYMETRIE}

  writeln(symetrique(A), symetrique2(A));
  writeln(symetrique(B), symetrique2(B));
  writeln(symetrique(C), symetrique2(C));
  writeln;

  {ESSAI DE TRACE pour B et C}

  trace(B,C,sym,traceBC);
  writeln(sym);
  writeln(traceBC:0:2); {:0:2 pour n'afficher que deux décimales}
  readln;
end.
```

Les tests sont concluants : les deux fonctions de test de symétrie renvoient false pour A, et true pour B et C. La procedure trace renvoie true pour le test de la symétrie de B et de C, et donne 140 pour la valeur de la trace de BC, ce que confirme un petit calcul à la main.

2. **Un produit scalaire sur $S(E)$**

   (a) • $[\cdot,\cdot]$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

   • Une combinaison linéaire de deux matrice étant faite coefficient par coefficient, la linéairité de la somme amène la linéarité de la trace. Alors, étant donné f, g, h trois éléments de $S(E)$ et λ un réel, on a :

   $$[\lambda f + g, h] = \operatorname{tr}((\lambda f + g) \circ h) = \operatorname{tr}(\lambda f \circ h + g \circ h) = \lambda \operatorname{tr}(f \circ h) + \operatorname{tr}(g \circ h) = \lambda[f, h] + [g, h].$$

   Ainsi, $[\cdot,\cdot]$ est linéaire par rapport à sa première variable.

- Comme pour toutes matrices A et B carrées d'ordre p, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, on en déduit que pour tout couple (f,g) d'endomorphismes de E, $\operatorname{tr}(f \circ g) = \operatorname{tr}(g \circ f)$. Ainsi, $[\cdot,\cdot]$ est symétrique.
- Étant symétrique et linéaire par rapport à sa première variable, $[\cdot,\cdot]$ est aussi linéaire par rapport à sa seconde variable.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$. Alors
$$[f,f] = \operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}a_{j,i}.$$
Or, A étant la matrice de f dans une base orthonormale, et f étant symétrique, A est une matrice symétrique, donc pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$. Par conséquent,
$$[f,f] = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant p} a_{i,j}^2 \geqslant 0$$
Ainsi, $[\cdot,\cdot]$ est positive.
- De plus, une somme de termes positifs étant nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, $[f,f] = 0$ si et seulement si pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $a_{i,j} = 0$, donc si et seulement si $A = 0$ ce qui équivaut à $f = 0$. Ainsi, $[\cdot,\cdot]$ est définie.

Ainsi $\boxed{[\cdot,\cdot] \text{ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire sur } S(E).}$

(b) Une première remarque : d'après les résultats de la partie I, tout élément de $T(E)$ peut s'écrire sous la forme u_x, pour un certain x de E.
Soit donc u_x un élément de $T(E)$, et f un élément de $S(E)$. Alors
$$N^2(f-u_x) = \operatorname{tr}((f-u_x)^2) = \operatorname{tr}(f^2) - \operatorname{tr}(f\circ u_x) - \operatorname{tr}(u_x \circ f) + \operatorname{tr}(u_x^2).$$
Or, pour tout couple (f,g) d'endomorphismes de E, $\operatorname{tr}(f\circ g) = \operatorname{tr}(g \circ f)$. Donc
$$N^2(f-u_x) = \operatorname{tr}(f^2) - 2\operatorname{tr}(f\circ u_x) + \operatorname{tr}(u_x^2).$$
D'après les questions I-2a et I-2c, on en déduit que
$$\boxed{N^2(f-u_x) = N^2(f) - 2\langle f(x), x\rangle + \|x\|^4},$$
ce qui est bien le résultat attendu, le produit scalaire étant symétrique.

3. **Condition nécessaire de minimum pour F.**

(a) On fixe x et y dans E. Pour tout t de $\mathbb{R}$,
$$h(t) = N^2(f) - 2\langle x+ty, f(x+ty)\rangle + \|x+ty\|^4.$$
Or, le produit scalaire étant bilinéaire, et f étant linéaire,
$$\begin{aligned}\langle x+ty, f(x+ty)\rangle &= \langle x, f(x)\rangle + t\langle y, f(x)\rangle + t\langle x, f(y)\rangle + t^2\langle y, f(y)\rangle \\ &= \langle x, f(x)\rangle + 2t\langle y, f(x)\rangle + t^2\langle y, f(y)\rangle,\end{aligned}$$
puisque f est un endomorphisme symétrique. De plus :
$$\begin{aligned}\|x+ty\|^4 = \langle x+ty, x+ty\rangle^2 &= (\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + t^2\|y\|^2)^2 \\ &= \|x\|^4 + 4t\|x\|^2\langle x,y\rangle + t^2(4\langle x,y\rangle^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2) + 4t^3\|y\|^2\langle x,y\rangle + t^4\|y\|^4.\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\quad h(t) = \|y\|^4t^4 + 4\|y\|^2\langle x,y\rangle t^3 + \Big(4\langle x,y\rangle^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2\langle y, f(y)\rangle\Big)t^2 \\ + 4\left(\|x\|^2\langle x,y\rangle - \langle y, f(x)\rangle\right)t + N(f^2) - 2\langle x, f(x)\rangle + \|x\|^4.\end{aligned}$$

Comme y est unitaire, on obtient donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = t^4 + 4\langle x, y\rangle t^3 + \Big(4\langle x, y\rangle^2 + 2\|x\|^2 - 2\langle y, f(y)\rangle\Big) t^2$$
$$+ 4\left(\|x\|^2 \langle x, y\rangle - \langle y, f(x)\rangle\right) t + N(f^2) - 2\langle x, f(x)\rangle + \|x\|^4.$$

Donc $\boxed{h \text{ est bien une fonction polynomiale de degré } 4}$, les coefficients étant précisés dans l'expression ci-dessus.

(b) Supposons que F présente un minimum en x. Il existe donc un voisinage U de x tel que pour tout $z \in U$, $F(z) \geqslant F(x)$. Alors, pour tout vecteur unitaire y de E, V étant un voisinage de x, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < \varepsilon$, $x + ty \in U$, donc $F(x + ty) \geqslant F(x)$, donc $h(t) \geqslant h(0)$. Ainsi, h présente un minimum (local) en 0. Comme h est une fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\boxed{h'(0) = 0}$.

(c) Or, $h'(0)$ est le coefficient du monôme de degré 1 (soit en dérivant, soit par l'utilisation de la formule de Taylor pour les polynômes). Ainsi, pour tout y unitaire

$$4\left(\|x\|^2 \langle x, y\rangle - < y, f(x) >\right) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \left\langle \|x\|^2 x - f(x), y\right\rangle = 0$$

Ceci est vrai pour tout vecteur unitaire y, donc notamment pour tous les vecteurs $(y_1, \cdots, y_p)$ d'une base orthonormale de E. Ainsi, $\|x\|^2 x - f(x)$ est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de E, donc $\|x\|^2 x - f(x) \in E^\perp = \{0\}$. Par conséquent,

$$\boxed{f(x) = \|x\|^2 x.}$$

Bel argument à retenir : pour montrer qu'un vecteur est nul, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à tous les vecteurs d'une base orthonormale...

(d) Supposons que F présente un minimum en x et que y est un vecteur unitaire. On a, d'après la question II-3a et la question II-3b :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(x + ty) - F(x) &= h(t) - F(x) \\ &= t^4 + 4\langle x, y\rangle t^3 + \Big(4\langle x, y\rangle^2 + 2\|x\|^2 - 2\langle y, f(y)\rangle\Big) t^2 \\ &= t^2\Big(t^2 + 4\langle x, y\rangle t + 4\langle x, y\rangle^2 + 2\|x\|^2 - 2\langle y, f(y)\rangle\Big) \\ &= t^2\Big((t + 2\langle x, y\rangle)^2 + 2\left(\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right)\Big).\end{aligned}$$

4. **Condition nécessaire et suffisante de minimum pour F.**

- Supposons que $F(x) = m(f)$. Alors, d'après la quesrion II-3b, F présentant un minimum en x, on a $f(x) = \|x\|^2 x$ (hypothèse (i))
  De plus, soit y un vecteur unitaire. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F(x + ty) \geqslant F(x)$, donc

  $$t^2\Big((t + 2\langle x, y\rangle)^2 + 2\left(\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right)\Big) \geqslant 0 \qquad \text{donc:} \qquad (t + 2\langle x, y\rangle)^2 + 2\left(\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right) \geqslant 0.$$

  Ce dernier polynôme en t est donc de signe constant, ce qui nécessite que $2\left(\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right) \geqslant 0$ (sinon, on peut factoriser en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, voir méthode de résolution des équations de degré 2). Ainsi, $\langle y, f(y)\rangle \leqslant \|x\|^2$ (hypothèse (ii))
- Réciproquement, si les deux conditions (i) et (ii) sont satisfaites, alors, soit $z \in E$, et $y = \frac{z - x}{\|z - x\|}$. Alors, y est unitaire, et en posant $t = \|z - x\|$, on a $z = x + ty$. On a alors :

  $$F(z) - F(x) = h(t) - F(x) = t^4 + 4\langle x, y\rangle t^3 + \Big(4\langle x, y\rangle^2 + 2\|x\|^2 - 2\langle y, f(y)\rangle\Big) t^2,$$

  du fait de l'hypothèse (i). Le calcul de la question II-3d est alors valide, et on obtient

  $$F(z) - F(x) = t^2\Big((t + 2\langle x, y\rangle)^2 + 2\left(\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right)\Big).$$

  D'après l'hypothèse (ii), il s'agit de la somme de deux réels positifs, donc $F(z) - F(x) \geqslant 0$. Cela étant vrai pour tout choix de z, on en déduit que F présente un minimum en x.

Ainsi, $\boxed{F \text{ admet un minimum en } x \text{ si et seulement si les deux conditions (i) et (ii) sont réalisées.}}$

5. **Étude du maximum de $\langle y, f(y)\rangle$ pour $\|y\| = 1$.**

   (a) Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) dans une base orthonormale de vecteurs propres. Comme f est un endomorphisme symétrique, on en déduit l'existence d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ formée de vecteurs propres pour f.

   (b) La matrice de f dans cette base est alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$, donc celle de f^2 est $\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p^2 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\boxed{N(f) = \sqrt{[f,f]} = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_p^2}}.$$

   (c) Soit y un vecteur unitaire, $y = \sum\limits_{i=1}^{p} y_i e_i$. Alors, f étant linéaire,

$$f(y) = \sum_{i=1}^{p} y_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{p} y_i \lambda_i e_i.$$

   Par conséquent, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle y, f(y)\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} y_i y_j \lambda_j \langle e_i, e_j\rangle .$$

   Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, sauf si $i = j$, dans lequel cas sa valeur est 1. Ainsi

$$\langle y, f(y)\rangle = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 \lambda_i.$$

   Comme les λ_i sont classés par ordre croissant, λ_p est la plus grande des valeurs propres. Ainsi, puisque pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $y_i^2 \geqslant 0$, on a :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ y_i^2\lambda_i \leqslant y_i^2\lambda_p \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{i=1}^{p} y_i^2\lambda_i \leqslant \lambda_p \sum_{i=1}^{p} y_i^2 = \lambda_p \|y\|^2 = \lambda_p. \tag{1}$$

   Ainsi, pour tout vecteur unitaire y, $\langle y, f(y)\rangle \leqslant \lambda_p$. De plus, pour $y = e_p$, qui est unitaire,

$$\langle y, f(y)\rangle = \langle e_p, f(e_p)\rangle = \langle e_p, \lambda_p e_p\rangle = \lambda_p \langle e_p, e_p\rangle = \lambda_p.$$

   Ainsi, λ_p est le maximum de $y \mapsto \langle y, f(y)\rangle$, lorsque y décrit les vecteurs unitaires de E, donc sa borne supérieure :

$$\boxed{\sup\{\langle y, f(y)\rangle, \|y\| = 1\} = \lambda_p.}$$

   Pour avoir l'égalité dans l'inégalité $\langle y, f(y)\rangle \leqslant \lambda_p$, il faut avoir égalité dans toutes les majorations effectuées en (1), ainsi, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $y_i^2\lambda_i = y_i^2\lambda_p$. Pour tout i tel que $\lambda_i \neq \lambda_p$, cela implique $y_i = 0$. Ainsi, y n'a de composantes non nulles sur $(e_1, \dots, e_p)$ que sur des vecteurs propres associées à la même valeur propre λ_p. Ainsi, y est dans l'espace propre associé à la valeur propre λ_p.

   Réciproquement, si $y \in E_{\lambda_p}$ (y unitaire), alors $f(y) = \lambda_p y$, donc $\langle y, f(y)\rangle = \lambda_p \langle y, y\rangle = \lambda_p$.

   Ainsi, l'ensemble des vecteurs unitaires y réalisant le maximum de $\langle y, f(y)\rangle$ est la sphère de rayon 1 centrée en 0 de E_{λ_p} (ie $\boxed{\text{l'ensemble des vecteurs unitaires de } E_{\lambda_p}}$).

6. **Conclusion et valeur de $m(f)$**

   (a) Supposons que $\lambda_p \leqslant 0$. Alors soit x tel que $F(x) = m(f)$. On a alors, d'après la question II-4, $f(x) = \|x\|^2 x$.

   Supposons que x est non nul, x est un vecteur propre associé à la valeur propre $\|x\|^2 > 0$. Ceci contredit le fait que λ_p, la plus grande des valeurs propres de f, est négative ou nulle. Ainsi, $x = 0$.

   Réciproquement, si $x = 0$, alors $f(x) = 0 = \|x\|^2 x$, et pour tous vecteurs unitaires y, $\langle y, f(y)\rangle \leqslant \lambda_p \leqslant 0$, d'après la question II-5c. Ainsi, d'après la question II-3, $\boxed{m(f) = F(0) = N(f)^2}$.

(b) Supposons que $\lambda_p > 0$. Soit x tel que $F(x) = m(f)$. Comme il existe y unitaire tel que $\langle y, f(y)\rangle = \lambda_p$ (question II-4c), et que $0 < \lambda_p \leqslant \langle y, f(y)\rangle \leqslant \|x\|^2$ (question II-3), on en déduit que $x \neq 0$, et que $\|x\|^2 \geqslant \lambda_p$.

Ainsi, puisque d'après la question II-4, $f(x) = \|x\|^2 x$, x étant non nul, x est un vecteur propre associé à la valeur propre $\|x\|^2$. Donc $\|x\|^2$ est une valeur propre de f, donc $\|x\|^2 \leqslant \lambda_p$, puisque λ_p est la plus grande des valeurs propres de f.

Ayant les deux inégalités, on en déduit que $\|x\|^2 = \lambda_p$ et que $x \in E_{\lambda_p}$. Ainsi, x est dans la sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{\lambda_p}$ de E_{λ_p}.

Réciproquement, si x est dans la sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{\lambda_p}$ de E_{λ_p}, alors $f(x) = \lambda_p x$, et comme $\|x\| = \sqrt{\lambda_p}$, on obtient $f(x) = \|x\|^2 x$. De plus, pour tout y unitaire dans E, d'après la question II-5c,

$$\langle y, f(y)\rangle \leqslant \lambda_p = \|x\|^2.$$

Par conséquent, les conditions (i) et (ii) de II-4 sont satisfaites, donc $F(x) = m(f)$.

Ainsi, on peut affirmer que l'ensemble des valeurs x telles que $F(x) = m(f)$ est

$\boxed{\text{l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre } \lambda_p \text{, de norme } \sqrt{\lambda_p}.}$

On obtient alors, pour un tel vecteur x :

$$m(f) = F(x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x)\rangle + \|x\|^4 = N^2(f) - 2\lambda_p \langle x, x\rangle + \lambda_p^2 = N^2(f) - 2\lambda_p\|x\|^2 + \lambda_p^2,$$

et donc :

$$\boxed{m(f) = N^2(f) - \lambda_p^2}.$$

7. **Application à l'étude d'un exemple.**

(a) M est ce qu'on appelle une matrice stochastique (c'est un type de matrice qui intervient souvent en probabilités) et symétrique. Cette étude est archi-calssique. A revoir impérativement.

On remarque que puisque $\sum\limits_{j=1}^{p} m_{i,j} = 1$, la i-ième coordonnée du produit MX, où x est la colonne entièrement contituée de 1, est égale à 1. Ainsi, ceci étant f vrai pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$M\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{1 est valeur propre de } M \text{, un vecteur propre associé étant par exemple le vecteur } \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.}$

À savoir (classique)

(b) Le vecteur X étant un vecteur propre associé à la valeur propre λ, il vérifie la relation

$$MX = \lambda X \qquad \text{soit:} \qquad M\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}.$$

Ceci donne un système de p équations en les p inconnues $x_1, \ldots, x_p$. La i-ième ligne de ce système est

$$\sum_{j=1}^{p} m_{i,j} x_j = \lambda x_i.$$

Comme X est non nul et que x_i est la coordonnée la valeur absolue maximale, on a $x_i \neq 0$. On peut donc diviser par x_i. Ainsi

$$|\lambda| = \left|\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}\frac{x_j}{x_i}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{p}\left|m_{i,j}\frac{x_j}{x_i}\right|, \tag{2}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Ainsi, les coefficients $m_{i,j}$ étant positifs, et x_i étant la coordonnée de valeur absolue maximale,

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} \left|\frac{x_j}{x_i}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} = 1. \tag{3}$$

Donc $\boxed{|\lambda| \leqslant 1.}$ On a l'égalité $|\lambda| = 1$ si et seulement si chacune des inégalités de (2) et (3) sont des égalités, donc si et seulement si les x_j sont tous de même signe (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, pour avoir l'égalité dans (2)), et si pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $|x_j| = |x_i|$ (pour avoir l'égalité dans (3). Ainsi, $\boxed{|\lambda| = 1 \text{ si et seulement si } x_1 = \cdots = x_p}$.

Alors $X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$, donc $X \in E_1$, donc $\boxed{\lambda = 1}$.

Ainsi, en particulier, si $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à 1, alors $x_1 = \cdots = x_p$, donc $X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$. Ainsi, $E_1 \subset \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$. L'inclusion réciproque ayant déjà été justifiée, on a égalité, donc $\boxed{\dim E_1 = 1}$.

Classique. À savoir !

(c) D'après la question II-6b (on est bien dans ce cas, puisque ici $\lambda_p = 1$ est la plus grande valeur propre), les vecteurs x tels que $F(x) = m(f)$ sont les vecteurs de E_1, de norme égale à $\sqrt{\lambda_p} = 1$. Donc cela fournit deux valeurs possibles :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{p}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{p}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $m(f) = N^2(f - u_{x_1}) = N^2(f - u_{x_2})$, ce qui fournit l'existence de $u \in T(E)$ tel que $m(f) = N^2(f - u)$.

De plus, comme $x_2 = -x_1$, on a de manière immédiate (en revenant à la définition de u_x) que $u_{x_1} = u_{x_2}$. Notons $u = u_{x_1} = u_{x_2}$.

Soit $v \in T(E)$ tel que $m(f) = N^2(f-v)$. D'après I-3c, il existe $y \in E$ tel que $v = u_y$. Alors $m(f) = F(y)$. D'après ce qui précède, cela n'est possible que si $y = x_1$ ou $y = x_2$, donc si $u_y = u_{x_1}$ ou $u_y = u_{x_2}$. Ainsi, $v = u$.

D'où l'unicité de $u \in T(E)$ tel que $m(f) = N^2(f - u)$.

De plus, pour tout $y = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_p\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^p$, on a :

$$u(v) = \langle v, x_1\rangle\, x_1 = \frac{1}{p}\,(v_1 + \cdots + v_p)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1 + \cdots + v_p\\ \cdots\\ v_1 + \cdots + v_p\end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice de u dans la base canonique est $\frac{1}{p}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$.

Cette matrice est le projecté orthogonal pour le produit scalaire défini en II-2 de la matrice symétrique M sur l'espace $T(E)$. C'est donc la matrice symétrique de rang 1 approchant au mieux M, au sens de la norme définie en II-2.