

DM n° 11 : Variables à densité

Correction de l'exercice –

1. Une densité de X est :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})} e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ strictement positive, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, dans lequel X prend ses valeurs presque sûrement. Ainsi, d'après le premier théorème de transfert, Y est une variable aléatoire à densité, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = P(\sqrt{X} \leq t) = \begin{cases} P(X \leq t^2) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, en dérivant presque partout (Y étant une variable à densité), on obtient une densité de Y :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Y(t) = \begin{cases} 2t f_X(t^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Puisque $B(\Omega) = \{-1, 1\}$, les événements $[B = 1]$ et $[B = -1]$ forment un système complet. Par ailleurs, étant donné $t \in \mathbb{R}$:

- $P_{[B=1]}(Z \leq t) = P(Y \leq t) = F_Y(t)$
- $P_{[B=-1]}(Z \leq t) = P(-Y \leq t) = P(Y \geq -t) = 1 - F_Y(-t)$.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales,

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(B = 1)F_Y(t) + P(B = -1)(1 - F_Y(-t)) = \frac{1}{2}(F_Y(t) + 1 - F_Y(-t)).$$

Comme F_Y est continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, il en est de même de F_Z . Ainsi, Z est une variable à densité, et une densité est obtenue par dérivation presque partout de l'égalité précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Z(t) = \frac{1}{2}(f_Y(t) + f_{-Y}(-t)) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} + 0 & \text{si } t > 0 \\ 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(-t)^2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on obtient donc une densité de Z :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}.$$

Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$. On en déduit : $E(Z) = 0$ et $V(Z) = \frac{1}{2}$.

3. On refait le même raisonnement, en considérant cette fois X dont une densité est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \frac{t^{\nu-1}}{b^\nu \Gamma(\nu)} e^{-\frac{t}{b}}.$$

On a alors, par le même raisonnement que ci-dessus :

$$f_Y(t) = \begin{cases} 2t f_X(t^2) = \frac{2t^{2\nu-1}}{b^\nu \Gamma(\nu)} e^{-\frac{t^2}{b}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, toujours d'après le même raisonnement,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Z(t) = \frac{1}{2}(f_Y(t) + f_Y(-t)) = \frac{|t|^{2\nu-1}}{b^\nu \Gamma(\nu)} e^{-\frac{t^2}{b}}.$$

Pour que Z suive une loi normale centrée réduite, il est donc nécessaire et suffisant que $2\nu - 1 = 0$ et $b = 2$, donc $\nu = \frac{1}{2}$ et $b = 2$. Remarquez qu'il s'agit de la loi du χ^2 à 1 degré de liberté. Ce n'est pas anodin, puisqu'on a fait ici l'opération inverse de celle qui permet de retrouver la loi du χ^2 en élevant au carré une variable normale centrée réduite.

Correction du problème –

Partie I – Étude d'un exemple

1. (a) X_2 suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{X_2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } t \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (les probabilités ponctuelles de X_2 étant nulles, puisqu'il s'agit d'une variable à densité) :

$$F_{X'_2}(t) = P(X'_2 \leq t) = P(X_2 \geq -t) = 1 - P(X_2 < -t) = 1 - P(X_2 \leq -t).$$

On obtient donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{X'_2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ 1 + t & \text{si } t \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

On reconnaît l'expression de la fonction de répartition d'une variable suivant une loi uniforme sur $[-1, 0]$.

On peut obtenir ce résultat plus rapidement en utilisant les propriétés de stabilité par transformation affine des lois uniformes, puisque $\varphi : x \mapsto -x$ est affine, et $\varphi([0, 1]) = [-1, 0]$.

- (b) Des densités de X_1 et de $-X_2 = X'_2$ sont :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \\ 1 & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{et} \quad f_{X'_2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [-1, 0] \\ 1 & \text{si } t \in [-1, 0] \end{cases}$$

Déterminons le produit de convolution de ces deux fonctions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X_1} \star f_{X'_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X'_2}(x-t) dt = \int_0^1 f_{X'_2}(x-t) dt = \int_{x-1}^x f_{X'_2}(u) du,$$

(changement de variables affine $u = x - t$)

- Si $x < -1$ ou si $x > 1$, $\int_{x-1}^x f_{X'_2}(u) du = 0$.
- Si $-1 \leq x \leq 0$, $\int_{x-1}^x f_{X'_2}(u) du = \int_{-1}^x 1 du = x + 1$.
- Si $0 \leq x \leq 1$, $\int_{x-1}^x f_{X'_2}(u) du = \int_{x-1}^1 1 du = 1 - x$.

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X_1} \star f_{X'_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \\ 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Cette fonction est continue (presque partout), et, puisque X_1 et X_2 sont indépendants, il en est de même de X_1 et $-X_2$. Ainsi, le produit de convolution ci-dessus est une densité de $X_1 - X_2$.

La fonction de répartition s'obtient par intégration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_1(x) = \int_{-\infty}^x f_{Y_1}(t) dt.$$

- Si $x < -1$, alors $\Phi_1(x) = 0$
- Si $x \in [-1, 0]$, alors

$$\Phi_1(x) = \int_{-1}^x (1+t) dt = \frac{(1+x)^2}{2},$$

- Si $x \in [0, 1]$,

$$\Phi_1(x) = \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^x (1-t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} = 1 - \frac{(1-x)^2}{2}.$$

- Si $x > 0$, alors $\Phi_1(x) = 1$.

(c) Tout d'abord, $Z_1(\Omega) = [0, 1]$, donc Φ_2 est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, et vaut 1 sur $]1, +\infty[$.

Soit $t \in [0, 1]$. On a :

$$\Phi_2(t) = P(Z_1 \leq t) = P(|Y_1| \leq t) = P(-t \leq Y_1 \leq t) = 1 - \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{(1-t)^2}{2} = 1 - (1-t)^2.$$

La fonction Φ_2 coïncide sur chacun des ouverts $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$, et $]1, +\infty[$ avec une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, Φ_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \Phi_2(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi_2(t) = \Phi_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} \Phi_2(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \Phi_2(t) = \Phi_2(1) = 0.$$

Ainsi, Φ_2 est aussi continue en 0 et en 1. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, Z_1 est bien une variable à densité. (On a détaillé cet argument une fois, on peut ensuite se contenter de faire une rapide référence à cette question les fois suivantes)

Une densité de Z_1 est obtenue en dérivant presque partout cette expression :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \\ 2(1-t) & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

(d) Z_1 ne dépend que de X_1 et X_2 , et les variables X_1 , X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes, donc Z_1 et $-X_3$ sont indépendantes.

Une densité de $-X_3$ est la même que $-X_2 = X'_2$. Ainsi, on peut calculer le produit de convolution :

$$\varphi_2 \star f_{-X_3}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(t) f_{-X_3}(x-t) dt = \int_0^1 2-2t f_{-X_3}(x-t) dt = \int_{x-1}^x 2(1-x+u) f_{-X_3}(t) dt.$$

- Si $x < -1$ ou si $x > 1$, alors $\varphi_2 \star f_{-X_3}(x) = 0$
- Si $x \in [-1, 0]$, alors

$$\varphi_2 \star f_{-X_3}(x) = \int_{-1}^x 2(1-x+u) du = 1-x^2$$

- Si $x \in [0, 1]$, alors

$$\varphi_2 \star f_{-X_3}(x) = \int_{x-1}^0 2(1-x+u) du = (1-x)^2.$$

Ainsi, cette fonction étant continue presque partout, et Z_1 et $-X_3$ étant indépendantes, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \\ 1-x^2 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ (1-x)^2 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

On obtient donc :

$$P(Z_1 - Z_3 \leq 0) = \int_{-\infty}^0 \varphi_3(t) dt = \int_{-1}^0 (1 - t^2) dt = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

La variable Z_1 représente la différence de temps entre le client qui sort le dernier et le client qui sort le premier, entre A_1 et A_2 . Le client A_3 sort en dernier si et seulement si cette différence de temps est moins importante que le temps mis par A_3 , donc si et seulement si $Z_1 - X_2 \leq 0$. Ainsi,

$$\boxed{P(E) = P(Z_1 - X_3) = \frac{2}{3}}.$$

2. Soit T_3 la variable aléatoire égale au temps total passé à la poste par A_3 .

(a) On a $T_3 = \inf(X_1, X_2) + X_3$ (c'est le temps d'attente de la libération du premier guichet, plus le temps de passage de A_3)

(b) Soit $Y = \inf(X_1, X_2)$. On a $Y(\Omega) = [0, 1]$.

Soit $x \in [0, 1]$. On a :

$$P(Y \leq x) = P(\inf(X_1, X_2) \leq x) = 1 - P(\inf(X_1, X_2) > x) = 1 - P(X_1 > x, X_2 > x).$$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, il vient :

$$P(Y \leq x) = 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) = 1 - (1 - x)^2.$$

On obtient donc la fonction de répartition de Y :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Comme en I-1(c), on vérifie que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout (inutile de redonner l'argument complet), donc que Y est bien une variable à densité. Ainsi, une densité de Y est obtenue par dérivation presque partout :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \\ 2(1 - t) & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}}$$

On reconnaît φ_2 , la densité de Z_1

(c) Les variables $\inf(X_1, X_2)$ et X_3 sont indépendantes, donc une densité h de T_3 est obtenu par le produit de convolution

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(t)f(x - t) dt,$$

où f est une densité de X_3 . Or φ_2 est égal à $2(1 - t)$ sur $[0, 1]$ et nul sinon. De plus $t \mapsto f(x - t)$ est égal à 1 si $t \in [x - 1, x]$ et à 0 sinon. Ainsi,

$$t \mapsto f(t)g(x - t)$$

est égal à $2(1 - t)$ sur $[0, 1] \cap [x - 1, x]$ et nul ailleurs. Par conséquent,

- si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, $[0, 1] \cap [x - 1, x] = \emptyset$, donc $h(x) = 0$;
- si $x \in [0, 1]$, $[0, 1] \cap [x - 1, x] = [0, x]$, et par conséquent,

$$h(x) = \int_0^x 2(1 - t) dt = 1 - (1 - x)^2 = 2x - x^2.$$

- si $x \in [1, 2]$, $[0, 1] \cap [x - 1, x] = [x - 1, 1]$, et par conséquent,

$$h(x) = \int_{x-1}^1 2(1 - t) dt = (2 - x)^2 = 4 - 4x + x^2.$$

La fonction h ainsi obtenue est continue au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, donc il s'agit d'une densité de $T_3 = \inf(X_1, X_2) + X_3$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{T_3}(x) = h(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 4 - 4x + x^2 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d) Le support de h étant borné, la variable T_3 admet une espérance, et

$$\begin{aligned} E(T_3) &= \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx + \int_1^2 (4x - 4x^2 + x^3) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + 2(4 - 1) - \frac{4}{3}(8 - 1) + \frac{1}{4}(16 - 1) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + 6 - \frac{28}{3} + \frac{15}{4} = \frac{8 - 3 + 72 - 112 + 45}{12} = \frac{10}{12} = \boxed{\frac{5}{6}}. \end{aligned}$$

Partie II – Cas où les opérations sont de deux types différents

1. (a) Tout d'abord, $X(\Omega) = [0, 2]$.

Soit $x \in [0, 2]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $(B, \overline{B})$, où B est l'événement : « A vient pour une opération postale »,

$$P(X \leq x) = P_B(X \leq x)P(B) + P_{\overline{B}}(X \leq x)P(\overline{B}).$$

• Si $x \in [0, 1]$,

$$P(X \leq x) = px + (1 - p)\frac{x}{2} = \frac{1 + p}{2} \cdot x.$$

• Si $x \in [1, 2]$,

$$P(X \leq x) = p + (1 - p)\frac{x}{2}.$$

Comme en I-1(c), on vérifie qu'il s'agit bien de la fonction de répartition d'une variable à densité (vous constatez qu'au fil de la copie, on est de plus en plus vague lorsqu'on fait un appel répété à un argument déjà donné : ne perdez pas trop de temps à justifier plusieurs fois la même chose ; une fois que vous avez montré que vous savez quoi et comment faire, contentez-vous de références)

Par dérivation, on obtient bien une densité de X :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 2] \\ \frac{1+p}{2} & \text{si } t \in [0, 1[\\ \frac{1-p}{2} & \text{si } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

(b) L'espérance de X existe car f_X est à support borné, et :

$$E(X) = \int_0^1 x \frac{1+p}{2} dx + \int_1^2 x \frac{1-p}{2} dx = \frac{1+p}{4} + \frac{3}{2} \frac{1-p}{2} = \boxed{1 - \frac{p}{2}}.$$

Vous pouvez vous amuser (et vous entraîner) à retrouver ce résultat à l'aide de la formule de l'espérance totale, et de l'expression de l'espérance des lois uniformes.

2. (a) • Tout d'abord, la fonction de répartition de $-X_2$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{-X_2}(x) = P(-X_2 \leq x) = P(X_2 \geq -x) = 1 - P(X_2 \leq -x),$$

donc une densité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{-X_2}(x) = f_{X_2}(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1-p}{2} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{1+p}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

- Ainsi, les variables X_1 et $-X_2$ étant indépendantes, sous réserve de continuité pp du résultat, une densité de $X_1 - X_2$ est donnée par le produit de convolution :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X_1 - X_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(x - t) dt \\
&= \frac{1+p}{2} \int_0^1 f_{-X_2}(x - t) dt + \frac{1-p}{2} \int_1^2 f_{-X_2}(x - t) dt \\
&= \frac{1+p}{2} \int_{x-1}^x f_{-X_2}(u) du + \frac{1-p}{2} \int_{x-2}^{x-1} f_{-X_2}(u) du.
\end{aligned}$$

Ainsi :

* si $x \leq -2$, $f_{X_1 - X_2}(x) = 0$

* si $-2 \leq x \leq -1$,

$$f_{X_1 - X_2}(x) = \frac{1+p}{2} \int_{-2}^x \frac{1-p}{2} du = \frac{1-p^2}{4}(x+2),$$

* si $-1 \leq x \leq 0$,

$$\begin{aligned}
f_{X_1 - X_2}(x) &= \frac{1+p}{2} \left(\int_{x-1}^{-1} \frac{1-p}{2} du + \int_{-1}^x \frac{1+p}{2} du \right) + \frac{1-p}{2} \int_{-2}^{x-1} \frac{1-p}{2} du \\
&= \frac{1+p}{2} \left(-x \frac{1-p}{2} + (x+1) \frac{1+p}{2} \right) + \frac{(1-p)^2}{4}(x+1) \\
&= \frac{1+3p^2}{4}x + \frac{1+p^2}{2}.
\end{aligned}$$

* si $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned}
f_{X_1 - X_2}(x) &= \frac{1+p}{2} \int_{x-1}^0 \frac{1+p}{2} du + \frac{1-p}{2} \left(\int_{x-2}^{-1} \frac{1-p}{2} du + \int_{-1}^{x-1} \frac{1+p}{2} du \right) \\
&= -\frac{1+3p^2}{4}x + \frac{1+p^2}{2}
\end{aligned}$$

* si $1 \leq x \leq 2$,

$$f_{X_1 - X_2}(x) = \frac{1-p}{2} \int_{x-2}^0 \frac{1+p}{2} du = \frac{1-p^2}{4}(2-x),$$

* si $x \geq 2$, $f_{X_1 - X_2}(x) = 0$.

Cette fonction étant bien continue presque partout (et même partout), nos calculs sont valides.

- On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, P(|X_1 - X_2| \leq x) = P(-x \leq X_1 - X_2 \leq x) = P(X_1 - X_2 \leq x) - P(X_1 - X_2 \leq -x).$$

On obtient donc, par dérivation, après avoir vérifié comme en I-1(c) qu'on a bien une variable à densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_{|X_1 - X_2|}(x) = f_{X_1 - X_2}(x) + f_{X_1 - X_2}(-x),$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{|X_1 - X_2|}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 + p^2 - \frac{1+3p^2}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1-p^2}{2}(2-x) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Remarquez que si $p = 1$, on retrouve φ_2 de la partie I (cas où toutes les opérations suivent $\mathcal{U}([0, 1])$).

De même, si $p = 0$, on retrouve $x \mapsto \frac{1}{2}\varphi_2\left(\frac{x}{2}\right)$, ce qui correspond à un facteur d'échelle 2.

- Encore quelques calculs pour déterminer une densité de $|X_1 - X_2| - X_3$, en calculant le produit de convolution, les variables $|X_1 - X_2|$ et X_3 étant indépendantes :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, f_{|X_1 - X_2| - X_3}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{|X_1 - X_2|}(t) f_{-X_3}(x - t) dt \\
&= \int_0^1 \left(1 + p^2 - \frac{1 + 3p^2}{2}t\right) f_{-X_2}(x - t) dt + \int_1^2 \frac{1 - p^2}{2}(2 - t) f_{-X_2}(x - t) dt \\
&= \int_{x-1}^x \left(1 + p^2 - \frac{1 + 3p^2}{2}(x - u)\right) f_{-X_2}(u) du + \int_{x-2}^{x-1} \frac{1 - p^2}{2}(2 - x + u) f_{-X_2}(u) du.
\end{aligned}$$

Remarquez que seules les valeurs négatives de x nous intéressent, puisque le but est de calculer $P(|X_1 - X_2| - X_3 \leq 0)$. On obtient donc :

* si $x < -2$, $f_{|X_1 - X_2| - X_3}(x) = 0$,

* si $-2 \leq x \leq -1$,

$$\begin{aligned}
f_{|X_1 - X_2| - X_3}(x) &= \int_{-2}^x \left(1 + p^2 - \frac{1 + 3p^2}{2}(x - u)\right) \frac{1 - p}{2} du \\
&= (x + 2)(1 + p^2) \frac{1 - p}{2} + \frac{1 - p}{2} \frac{1 + 3p^2}{2} \left[\frac{(x - u)^2}{2}\right]_{-2}^x \\
&= \frac{1 - p}{2} \left((1 + p^2)(x + 2) - (1 + 3p^2) \frac{(x + 2)^2}{4}\right) \\
&= \frac{(x + 2)(1 - p)}{2} \left(\frac{1 - p^2}{2} - \frac{1 + 3p^2}{4}x\right).
\end{aligned}$$

* si $-1 \leq x \leq 0$,

$$\begin{aligned}
f_{|X_1 - X_2| - X_3}(x) &= \int_{x-1}^{-1} \left(1 + p^2 - \frac{1 + 3p^2}{2}(x - u)\right) \frac{1 - p}{2} du + \\
&\quad + \int_{-1}^x \left(1 + p^2 - \frac{1 + 3p^2}{2}(x - u)\right) \frac{1 + p}{2} du + \int_{-2}^{x-1} \frac{1 - p^2}{2}(2 - x + u) \frac{1 - p}{2} du \\
&= -x \frac{1 - p}{2} (1 + p^2) + \frac{1 + 3p^2}{2} \frac{1 - p}{2} \left(\frac{(x + 1)^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + (x + 1)(1 + p^2) \frac{1 + p}{2} + \\
&\quad + \frac{1 + p}{2} \frac{1 + 3p^2}{2} \left(0 - \frac{(x + 1)^2}{2}\right) + \frac{1 - p}{2} \frac{1 - p^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \\
&= \dots = -\frac{x^2}{8}(1 + p - p^2 + 7p^3) + \frac{x}{2}p(1 - p^2) + \frac{1}{4}(2 + p + p^3).
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, f_{|X_1 - X_2| - X_3}(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)(1-p)}{2} \left(\frac{1-p^2}{2} - \frac{1+3p^2}{4}x\right) & \text{si } x \in [-2, -1[\\ -\frac{x^2}{8}(1 + p - p^2 + 7p^3) + \frac{x}{2}p(1 - p^2) + \frac{1}{4}(2 + p + p^3) & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

(on ne donne pas l'expression de $f_{|X_1 - X_2| - X_3}$ sur $\mathbb{R}_+$, car elle est inutile)

Et miraculeusement (le miracle m'a occupé plus d'une heure et m'a obligé à refaire 3 fois les calculs...), on retrouve, pour $p = 1$, la fonction φ_3 , et pour $p = 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\varphi_3\left(\frac{x}{2}\right)$. Cela nous conforte dans la validité du résultat...

- On obtient donc enfin :

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(|X_1 - X_2| - X_3 \leq 0) \\
&= \int_{-2}^{-1} \frac{1-p}{2} \left((1+p^2)(x+2) - (1+3p^2)\frac{(x+2)^2}{4} \right) dx + \\
&\quad + \int_{-1}^0 \left(-\frac{x^2}{8}(1+p-p^2+7p^3) + \frac{x}{2}p(1-p^2) + \frac{1}{4}(2+p+p^3) \right) dx \\
&= \frac{1-p}{2} \frac{1+p^2}{2} - \frac{1-p}{2} \frac{1+3p^2}{12} - \frac{1+p-p^2+7p^3}{24} - \frac{p(1-p^2)}{4} + \frac{1}{4}(2+p+p^3) \\
&= \dots = \frac{1}{12} (16 - 6p + 4p^2 + 2p^3) = \boxed{\frac{1}{12} (8 + p(p-1)(p+3))}
\end{aligned}$$

Encore une fois, constatez que pour $p = 1$, on retrouve une probabilité de $\frac{2}{3}$, et pour $p = 0$ également (cette probabilité n'est évidemment pas modifiée par le changement d'échelle !)

- (b) Comme précédemment, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(\inf(X_1, X_2) \leq x) = 1 - P(\inf(X_1, X_2) > x) = 1 - P(X_1 > x, X_2 > x),$$

et, les variables aléatoires X_1 et X_2 étant indépendantes,

$$P(\inf(X_1, X_2) \leq x) = 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) = 1 - (1 - P(X_1 \leq x))(1 - p(X_2 \leq x)).$$

On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{\inf(X_1, X_2)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - \frac{1+p}{2}x)^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - (1-p)^2 (1 - \frac{x}{2})^2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Comme en I-1(c), on vérifie que $\inf(X_1, X_2)$ est une variable à densité, dont on obtient une densité par dérivation presque partout :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\inf(X_1, X_2)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ (1+p) \left(1 - \frac{1+p}{2}x\right) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ (1-p)^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Ainsi, l'espérance existe (le support est borné), et

$$\begin{aligned}
E(\inf(X_1, X_2)) &= \int_0^1 x(1+p) \left(1 - \frac{1+p}{2}x\right) dx + \int_1^2 x(1-p)^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1+p}{2} - \frac{(1+p)^2}{6} + \frac{3}{2}(1-p)^2 - \frac{7(1-p)^2}{6} \\
&= \frac{1}{6}(3 + 3p - 1 - 2p - p^2 + 9 - 18p + 9p^2 - 7 + 14p - 7p^2) = \boxed{\frac{1}{6}(4 - 3p + p^2)}.
\end{aligned}$$

- (c) On calcule également l'espérance de X_3 :

$$E(X_3) = \int_0^1 \frac{1+p}{2}x dx + \int_1^2 \frac{1-p}{2}x dx = \frac{1+p}{4} + \frac{3(1-p)}{4} = \frac{1}{4}(4 - 2p) = \frac{2-p}{2}.$$

On a alors :

$$E(T_3) = E(\inf(X_1, X_2) + X_3) = E(\inf(X_1, X_2)) + E(X_3) = \frac{1}{6}(4 - 3p + p^2) + \frac{2-p}{2} = \boxed{\frac{1}{6}(10 - 6p + p^2)}.$$

Constatez encore une fois que pour $p = 1$, on retrouve $E(T_3) = \frac{5}{6}$, alors que pour $p = 0$, on obtient le double (le facteur d'échelle double évidemment l'espérance totale de l'attente).

3. (a) i. Chaque personne arrivant à la poste est confrontée à une épreuve de Bernoulli, dont le succès est de venir pour une opération postale, donc de se diriger vers le guichet 1. Le nombre de personnes passant au guichet avant A_3 est égal au nombre de succès dans les deux épreuves de Bernoulli correspondant aux deux personnes A_1 et A_2 précédant A_3 . Ainsi, N suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$.

- ii. Remarquez que ce qu'on demande est la loi **conditionnelle** de A_3 sachant que A_3 fait une opération postale. Nous noterons E cet événement donnant la condition.

D'après la formule des probabilités totales sur le système complet $([N = 0], [N = 1], [N = 2])$, on obtient, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P_E(T_3 \leq x) &= P_E(T_3 \leq x \mid N = 0)P_E(N = 0) + P_E(T_3 \leq x \mid N = 1)P(N = 1) + \\ &\quad + P_E(T_3 \leq x \mid N = 2)P_E(N = 2) \\ &= (1 - p)^2 P_E(T_3 \leq x \mid N = 0) + 2p(1 - p)P(T_3 \leq x \mid N = 1) + p^2 P_E(T_3 \leq x \mid N = 2), \end{aligned}$$

car N , le nombre de personnes avant A_3 passant par le guichet des opérations postales, est indépendant de l'événement E .

Or, toutes les personnes passant au guichet 1 venant pour une opération postale, leur temps de passage suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Ainsi,

- $x \mapsto P_E(T_3 \leq x \mid N = 0)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme, (il n'y a personne avant A_3 , seul son temps de passage est pris en considération)
- $x \mapsto P_E(T_3 \leq x \mid N = 1)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire obtenue comme somme de deux variables indépendantes suivant une loi uniforme,
- $x \mapsto P_E(T_3 \leq x \mid N = 2)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire obtenue comme somme de trois variables mutuellement indépendantes suivant une loi uniforme,

Calculons rapidement ces fonctions de répartition, c'est classique et nous en avons maintenant l'habitude.

Soit X, Y et Z trois variables mutuellement indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors

- $\forall x \in [0, 1], F_X(x) = x$, et si $x \leq 0$ $F_X(x) = 0$, et si $x \geq 1$, $F_X(x) = 1$.
- Puisque X et Y sont indépendantes, une densité de $X + Y$ est obtenue à l'aide du produit de convolution :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t) dt = \int_0^1 f_Y(x-t) dt = \int_{x-1}^x f_Y(u) du$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{X+Y}(x) = \begin{cases} \int_0^x 1 du = x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \int_{x-1}^1 1 du = 2 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient de même une densité de $X + Y + Z$ en effectuant le produit de convolution de f_{X+Y} par f_Z :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{X+Y+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X+Y}(x-t)f_Z(t) dt = \int_0^1 f_{X+Y}(x-t) dt = \int_{x-1}^x f_{X+Y}(u) du.$$

Ainsi :

- * si $0 \leq x < 1$,

$$f_{X+Y+Z}(x) = \int_0^x u du = \frac{x^2}{2};$$

- * si $1 \leq x < 2$,

$$f_{X+Y+Z}(x) = \int_{x-1}^1 u du + \int_1^x (2-u) du = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{(2-x)^2}{2} = 1 - x^2 + 3x - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + 3x - x^2,$$

* si $2 \leq x < 3$,

$$f_{X+Y+Z}(x) = \int_{x-1}^2 (2-u) \, du = \frac{(3-x)^2}{2}.$$

On obtient donc les fonctions de répartition par intégration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

et de même :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X+Y+Z}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^3}{6} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{(3-x)^3}{6} & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \\ 1 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

On obtient donc la fonction de répartition suivante de T_3 , pour la mesure de probabilité P_E :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{T_3|E}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (1-p)^2x + 2p(1-p)\frac{x^2}{2} + p^2\frac{x^3}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (1-4p+\frac{7}{2}p^2) + x(4p-\frac{11}{2}p^2) + x^2(-p+\frac{5}{2}p^2) - \frac{p^2}{3}x^3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{p^2}{6}(3-x)^3 & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \\ 1 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

- iii. En dérivant, après avoir vérifié comme en I-3(c) que T_3 est bien une variable à densité dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P_E)$, nous obtenons une densité de T_3 , pour la mesure de probabilité P_E :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{T_3|E}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou si } x > 3 \\ (1-p)^2 + 2p(1-p)x + p^2x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (4p - \frac{11}{2}p^2) + (-2p + 5p^2)x - p^2x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{p^2}{2}(3-x)^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \\ 1 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

L'espérance de T_3 (qui est ici aussi une espérance conditionnelle) est alors :

$$\begin{aligned} E(T_3 | E) &= \int_0^1 ((1-p)^2x + 2p(1-p)x^2 + p^2x^3) \, dx + \\ &\quad + \int_1^2 \left(\left(4p - \frac{11}{2}p^2\right)x + (-2p + 5p^2)x^2 - p^2x^3 \right) \, dx + \int_2^3 \frac{p^2}{2}(3-x)^2x \, dx \\ &= \frac{(1-p)^2}{2} + \frac{2}{3}p(1-p) + \frac{p^2}{4} + \frac{3}{2}(4p - \frac{11}{2}p^2) + \frac{7}{3}(-2p + 5p^2) - \frac{15}{4}p^2 + \\ &\quad + 3p^2 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot \frac{19}{3} \cdot p^2 + \frac{65}{12}p^2 \end{aligned}$$

Et là encore, on voit, sous nos yeux ébahis, s'opérer la magie des mathématiques, puisque cette expression se simplifie à merveille, et qu'on obtient :

$$E(T_3 | E) = p + \frac{1}{2}$$

Remarquez qu'on peut retrouver beaucoup plus facilement ce résultat à l'aide de la formule de l'espérance totale (à ceci près que cette formule n'est donnée dans le cours que pour les variables discrètes, donc on sort un peu du cadre du programme) :

$$E(T_3 | E) = E(T_3 | E \cap N = 0)P_E(N = 0) + E(T_3 | E \cap N = 1)P_E(N = 1) + E(T_3 | E \cap N = 2)P_E(N = 2)$$

Les espérances conditionnelles à calculer sont alors des espérances de sommes de lois uniformes sur $[0, 1]$, indépendantes : avec les notations précédentes :

$$E(T_3 | E \cap N = 0) = E(X_1) = \frac{1}{2}, \quad E(T_3 | E \cap N = 1) = E(X_1 + X_2) = 1 \quad \text{et} \quad E(T_3 | E \cap N = 2) = E(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{3}{2}$$

On retrouve bien alors :

$$E(T_3 | E) = \frac{(1-p)^2}{2} + 2p(1-p) + \frac{3}{2}p^2 = \boxed{\frac{1}{2} + p},$$

avec des calculs tout de même bien plus agréables.

Or, en notant T'_3 le temps de passage total à la poste de A_3 dans le cas où il n'y a pas de distinction entre les guichets, on obtient :

$$E(T'_3 | E) = E(\inf(X_1, X_2) | E) + E(T_3 | E) = \frac{1}{6}(4 - 3p + p^2) + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{7}{6} - \frac{p}{2} + \frac{p^2}{6}},$$

en reprenant partiellement les résultats de 2(b).

Il est donc en moyenne plus intéressant d'avoir des guichets séparés si $E(T_3 | E) \leq E(T'_3 | E)$, donc si

$$p + \frac{1}{2} \leq \frac{7}{6} - \frac{p}{2} + p^2 \quad \text{donc:} \quad p^2 - 9p + 4 \geq 0.$$

Les deux racines de ce polynôme sont

$$p_1 = \frac{9 - \sqrt{65}}{2} \in]0, 1[, \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{9 + \sqrt{65}}{2} > 1.$$

Le polynôme est donc positif « à l'extérieur de ses racines », et comme la probabilité p est comprise entre 0 et 1, on obtient la condition suivante :

$$\boxed{\text{Il est plus intéressant d'avoir des guichets séparés si et seulement si } p \leq \frac{9 - \sqrt{65}}{2}.}$$

(donc si le nombre de personnes venant pour une opération longue est plus important)

Remarquez que la valeur limite est à peu près égale à $\frac{1}{2}$, très légèrement inférieure, puisque $\sqrt{65}$ est très légèrement supérieur à 8. Plus précisément, cette valeur limite vaut 0.469, à 10^{-3} près.

Partie III – Cas d'un nombre plus grand de guichets

1. On a $U_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi, si $x \leq 0$, $P(U_n \leq x) = 0$, et

$$\forall x \geq 0, \quad P(U_n \leq x) = 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) \geq x) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \geq x]\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i \geq x)$$

puisque les X_i sont mutuellement indépendants. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x} = 1 - e^{-n\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{U_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)}$.

On obtient donc directement $\boxed{E(U_n) = \frac{1}{n\lambda} \text{ et } V(U_n) = \frac{1}{n^2\lambda^2}}$.

2. On a $V_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi, pour tout $x \leq 0$, $P(V_n \leq 0) = 0$, et

$$\forall x \geq 0, \quad P(V_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = (1 - e^{-\lambda x})^n,$$

les X_i étant mutuellement indépendants. Une densité est donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On vérifie comme plus haut qu'on a bien une variable à densité, dont une densité est donnée pour tout $x > 0$ par :

$$f(x) = n\lambda e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} e^{-k\lambda x} = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n \binom{n-1}{k} e^{-(k+1)\lambda x}.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\int_0^{+\infty} (k+1)\lambda x e^{-(k+1)\lambda x} dx$ est l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}((k+1)\lambda)$, donc l'intégrale est convergente et vaut :

$$\int_0^{+\infty} (k+1)\lambda x e^{-(k+1)\lambda x} dx = \frac{1}{(k+1)\lambda}.$$

Ainsi, en tant que somme finie d'intégrales convergentes, l'intégrale définissant $E(V_n)$ est convergente. Donc $E(V_n)$ existe, et

$$\begin{aligned} E(V_n) &= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n}{(k+1)\lambda} \binom{n-1}{k} \int_0^{+\infty} (k+1)\lambda x e^{-(k+1)\lambda x} dx \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n}{((k+1)\lambda)^2} \binom{n-1}{k} = \boxed{\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k+1}}. \end{aligned}$$

3. Soit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'épreuve de Bernoulli dont le succès est : « la personne A_i a terminé avant l'instant t ».

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le paramètre p_i de cette épreuve est :

$$p_i = P(X_i \leq t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Ainsi, ces épreuves de Bernoulli ont toutes même paramètre $1 - e^{-\lambda t}$, et sont mutuellement indépendantes. La variable W_t compte le nombre de succès lors de ces n épreuves. Ainsi, $\boxed{W_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - e^{-\lambda t})}$.

Son espérance est donc :

$$\boxed{E(W_t) = n(1 - e^{-\lambda t})}.$$