

DM n° 11 bis : Variables à densité

Correction du problème – (HEC-ESCP-EAP 2008)

Préliminaire

1. (a) • L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx$ admet deux impropriétés, en $-\infty$ et en $+\infty$, la fonction intégrée étant continue sur $\mathbb{R}$.
 - Si $a \leq 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-ax^2} \geq 1 \geq 0$. Or, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 1 dx$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} 1 dx$ sont divergentes. Ainsi, d'après le théorème de comparaison, les intégrandes étant positives, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx$ diverge.
 - Si $a > 0$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-ax^2}$ est une densité de la loi normale de paramètre $\mathcal{N}(0, \sigma)$, où $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2a}}$. Ainsi, l'intégrale est convergente (en tant qu'intégrale d'une densité, à une constante près), et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-ax^2} dx = 1, \quad \text{soit:} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Pour le dernier point, on pouvait aussi se ramener à l'intégrale de Gauss.

- (b) • Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\exp(-ax^2 + bx) = \exp\left(-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}\right) = \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \exp\left(-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2\right).$$

Ainsi, la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx$ est la même que celle de $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2\right) dx$.

On effectue le changement de variable affine (donc valide) $t = x - \frac{b}{2a}$ sur cette intégrale, et on en déduit que la nature de l'intégrale est égale à celle de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt$. Or cette intégrale est convergente si et seulement si $a > 0$, d'après la question précédente. Ainsi, il en est de même pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx$.

- Si $a > 0$, nous avons alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2} dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

2. (a) • Soit $s \in \mathbb{R}$. Par définition, et par le théorème de transfert (propriété rappelée en fin d'introduction), $s \in \mathcal{D}_U$ si et seulement si l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge. Cela correspond à une intégrale du type étudié dans la question précédente, avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = s$. Comme $a > 0$, on est dans le cas de convergence, quelle que soit la valeur de s .
Ainsi, $\mathcal{D}_U = \mathbb{R}$.
 - Nous avons alors, pour tout s de $\mathcal{D}_U$:

$$\Phi_U(s) = E(e^{sX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + sx} dx = \sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{s^2}{2}}.$$

- (b) • On pose : $Z = U^2$. Alors $s \in \mathcal{D}_Z$ si et seulement si $E(e^{sZ})$ existe, donc ssi $E(e^{sU^2})$ existe. Or, d'après le théorème de transfert, cette espérance existe ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx^2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge, donc ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-s)x^2} dx$ converge.
D'après la question 1(a), c'est le cas ssi $\frac{1}{2} - s > 0$, donc si $s < \frac{1}{2}$. Ainsi, $\mathcal{D}_Z =]-\infty, \frac{1}{2}[$.
 - On a alors, pour tout s de $]-\infty, \frac{1}{2}[$:

$$\Phi_Z(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-s)x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}-s}} = \frac{1}{\sqrt{1-2s}} = (1-2s)^{-\frac{1}{2}}.$$

3. (a) Tout d'abord, déterminons en fonction d'une densité f_X de X une densité $f_{\mu X + \beta}$ de $\mu X + \beta$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $\mu > 0$, on a :

$$F_{\mu X + \beta}(x) = P(\mu X + \beta \leq x) = P(X \leq \frac{x - \beta}{\mu}) = F_X\left(\frac{x - \beta}{\mu}\right).$$

La fonction F_X étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, il en est de même de $F_{\mu X + \beta}$, par composition. Ainsi, on obtient une densité par dérivation presque partout :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\mu X + \beta}(x) = \frac{1}{\mu} f_X\left(\frac{x - \beta}{\mu}\right).$$

- De même, si $\mu < 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\mu X + \beta}(x) = -\frac{1}{\mu} f_X\left(\frac{x - \beta}{\mu}\right).$$

- Implicitement, puisque la définition de $\mathcal{D}_Y$ nécessite que Y soit une variable à densité, il est nécessaire que $\mu X + \beta$ soit une variable à densité, ce qui n'est pas le cas si $\mu = 0$. Ainsi, ce cas est à exclure.

Soit $s \in \mathbb{R}$. Le réel s appartient à $\mathcal{D}_{\mu X + \beta}$ si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X\left(\frac{x - \beta}{\mu}\right) dx$ est convergente

En effectuant le changement de variable affine (donc valide) $y = \frac{x - \beta}{\mu}$, donc $x = \mu y + \beta$, l'intégrale ci-dessus est

convergente si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\beta} e^{s\mu y} f_X(y) dy$ est convergente, et, $e^{s\beta}$ étant indépendant de la variable

d'intégration, cela se produit si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\mu y} f_X(y) dy$ est convergente, donc si et seulement si $\mu s \in \mathcal{D}_X$.

Dans ce cas, le changement de variables ci-dessus amène :

$$\Phi_{\mu X + \beta}(s) = \frac{1}{|\mu|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X\left(\frac{x - \beta}{\mu}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\beta} e^{s\mu y} f_X(y) dy = e^{s\beta} \Phi_X(\mu s).$$

La valeur absolue s'en va du fait que si $\mu < 0$, le changement de variable est décroissant, et qu'il faut donc ajouter un signe moins (pour l'échange des bornes), compensant celui issu de la valeur absolue.

- (b) La variable X admet une densité f_X nulle sur $\mathbb{R}_-$, et décrite sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_X(x) = \frac{x^{\nu-1} e^{-x}}{\Gamma(\nu)}.$$

Ainsi, $s \in \mathcal{D}_X$ si et seulement si $\int_0^{+\infty} e^{(s-1)x} x^{\nu-1} dx$ converge.

- Si $s > 1$, alors, d'après les croissances comparées, $1 = o(e^{(s-1)x} x^{\nu-1})$, et les fonctions sont positives, donc la divergence de $\int_0^{+\infty} 1 dx$ entraîne celle de $\int_0^{+\infty} e^{(s-1)x} x^{\nu-1} dx$.
- Si $s = 1$, on a une série de Riemann de paramètre $\nu - 1$, qui diverge soit en la borne 0, soit en la borne $+\infty$.
- Si $s < 1$, le changement de variables affine strictement croissant $y = -(s-1)x$ assure que l'intégrale ci-dessus est de même nature que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{1-s}\right)^{\nu-1} e^{-y} \frac{dy}{1-s}$, qui est convergente en tant qu'intégrale Γ de paramètre $\nu > 0$.

Ainsi, $\mathcal{D}_X =]-\infty, 1[$, et

$$\forall s \in \mathcal{D}_X, \quad \Phi_X(s) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{1-s}\right)^{\nu-1} e^{-y} \frac{dy}{1-s} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot (1-s)^{-\nu} \cdot \Gamma(\nu) = (1-s)^{-\nu}.$$

De plus, d'après la question précédente, $s \in \mathcal{D}_{2X}$ si et seulement si $2s \in \mathcal{D}_X$, donc si et seulement si $s < \frac{1}{2}$. Ainsi, $\mathcal{D}_{2X} =]-\infty, \frac{1}{2}[$. Toujours d'après la question précédente, on obtient alors :

$$\forall s \in]-\infty, \frac{1}{2}[, \quad \Phi_{2X}(s) = \Phi_X(2s) = (1-2s)^{-\nu}.$$

Partie I – Loi du χ^2 centré

1. Soit $f = f_{X_4}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{4} \times \Gamma(2) \times x \times \exp\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{x e^{-\frac{x}{2}}}{4}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{8} (2 - x) e^{-\frac{x}{2}}.$$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant pour f (on se contente de le donner sur $\mathbb{R}_+$, puisque f est nulle sur $\mathbb{R}_-$). On remarque que la limite en 0 est 0, donc on a continuité en 0.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{2e}$	0

Je vous laisse tracer le graphe.

2. (a) On sait que si $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$, alors $\alpha X \hookrightarrow \Gamma(\alpha g, \nu)$ (le premier paramètre est un paramètre d'échelle). Ainsi,

$$\frac{X_r}{2} \hookrightarrow \Gamma\left(2 \dots \frac{1}{2}, \frac{r}{2}\right) = \Gamma\left(1, \frac{r}{2}\right) = \gamma\left(\frac{r}{2}\right).$$

Ainsi, $E\left(\frac{X_r}{2}\right) = V\left(\frac{X_r}{2}\right) = \frac{r}{2}$, donc :

$$E(X_r) = r \quad \text{et} \quad V(X_r) = 2r.$$

- (b) D'après le préliminaire, question 3(b), en posant $X = \frac{X_r}{2}$, suivant une loi γ de paramètre $\nu = \frac{r}{2}$,

$$\mathcal{D}_{X_r} = \mathcal{D}_{2X} =]-\infty, \frac{1}{2}[.$$

De plus, toujours d'après cette question

$$\forall s \in]-\infty, \frac{1}{2}[, \quad \Phi_{X_r}(s) = (1 - 2s)^{-\nu} = (1 - 2s)^{-\frac{r}{2}}.$$

3. (a) On peut vérifier par le calcul de la fonction de répartition que X_1 et U^2 ont même loi. On peut aussi se servir de la fonction Φ : D'après la question 2(b) du préliminaire, et la question I-2(b), $\mathcal{D}_{X_1} = \mathcal{D}_{U^2} =]-\infty, \frac{1}{2}[$, ouvert non vide, et $\Phi_{X_1} = \Phi_{U^2}$. D'après le premier point admis dans le préambule du problème, on en déduit que X_1 et U^2 suivent la même loi.
- (b) Les Z_i sont mutuellement indépendantes (car les U_i le sont), et suivent la même loi $\Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right)$, d'après la question précédente. Par stabilité de la loi Γ , on en déduit que W_n suit une loi $\Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$. Ainsi, W_n suit une loi du chi-deux centrée de paramètre n .
- (c) D'après la question 2(b), $\mathcal{D}_{W_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$, et

$$\forall s \in]-\infty, \frac{1}{2}[, \quad \Phi_{W_n}(s) = (1 - 2s)^{-\frac{n}{2}} = \prod_{i=1}^n \Phi_{Z_i}(s).$$

Même si ce n'est pas demandé, on peut constater que cela se réécrit :

$$\forall s \in]-\infty, \frac{1}{2}[, \quad \Phi_{W_n}(s) = (\Phi_{X_1}(s))^n.$$

On peut aussi répondre à cette question en constatant que

$$\Phi_{W_n}(s) = E(e^{sZ_1} e^{sZ_2} \dots e^{sZ_n}) = \prod_{i=1}^n E(e^{sZ_i}),$$

du fait de l'indépendance mutuelle de ces variables.

4. (a) Il fallait lire : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2$.

On pose, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U_i = \frac{T_i}{\sigma}$. Alors $U_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. De plus, les U_i sont mutuellement indépendants, car les T_i le sont. On déduit des questions précédentes que $\sum_{i=1}^n U_i^2 \hookrightarrow \chi\left(\frac{n}{2}\right)$, donc que $\frac{nS_n}{\sigma^2} \hookrightarrow \chi\left(\frac{n}{2}\right)$. On en déduit que :

$$E(S_n) = \frac{\sigma^2}{n} E(X_n) = \sigma^2.$$

Ainsi, S_n étant aussi à valeurs positives (et l'ensemble des valeurs possibles pour σ étant $\mathbb{R}_+$, en incluant 0 qui correspond à une variable certaine), et définie à partir de l'échantillon i.i.d. $(T_1, \dots, T_n)$ indépendamment de σ , on en déduit que S_n est un estimateur sans biais de σ^2 .

De plus,

$$V(S_n) = \frac{\sigma^4}{n^2} V(X_n) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n) = 0$. On utilise alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$0 \leq P(|S_n - \sigma^2| > \varepsilon) = P(|S_n - E(S_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2},$$

et le théorème d'encadrement, ainsi que la valeur de la limite de $V(S_n)$, nous permettent de conclure qu'à ε fixé :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n - \sigma^2| > \varepsilon) = 0.$$

Ainsi, S_n converge en probabilité vers la variable certaine égale à σ^2 . C'est donc un estimateur convergent du paramètre σ^2 .

(b) On a :

$$P\left(0 < \sigma^2 \leq \frac{nS_n}{k_\alpha}\right) = P\left(\sigma^2 \leq \frac{nS_n}{k_\alpha}\right) = P\left(\frac{nS_n}{\sigma^2} \geq k_\alpha\right)$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, donc $\frac{T_i}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, et sont mutuellement indépendantes. Ainsi, d'après la question I-3(b), $\frac{nS_n}{\sigma^2}$, qui est la somme des $\frac{T_i}{\sigma^2}$, suit la même loi que W_n . Par conséquent,

$$P\left(0 < \sigma^2 \leq \frac{nS_n}{k_\alpha}\right) = P(W_n \geq k_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Par définition, $]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}]$ est bien un intervalle de confiance de σ^2 , au niveau de confiance $1 - \alpha$, donc au niveau de risque α .

Partie II – Loi du χ^2 décentré

1. (a) • $E(U^3)$ existe si et seulement si l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ existe. Par continuité de l'intégrande (qu'on notera f) sur $\mathbb{R}$, cette intégrale admet exactement deux impropriétés en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 f(t) = t^5 e^{-\frac{t^2}{2}} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0,$$

d'après les croissances comparées. Ainsi :

$$f(t) = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme les fonctions considérées sont positives, et que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2}$ convergent en tant qu'intégrales de Riemann de paramètre $2 > 1$, en l'infini, on en déduit l'existence de $E(U^3)$. De plus, $E(U^3)$ s'écrit comme l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fonction impaire. La convergence nous assure donc l'égalité :

$$E(U^3) = 0.$$

- De même que ci-dessus, $E(U^4)$ existe. On a alors :

$$E(U^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On effectue une intégration par parties en posant les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = t^3, \quad u'(t) = 3t^2, \quad v(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad v'(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Les croissances comparées amène facilement :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t)v(t) = 0,$$

d'où la possibilité de faire l'intégration par parties directement sur l'intégrale impropre (et cela nous assure la convergence de l'intégrale obtenue) :

$$E(U^4) = \left[u(t)v(t) \right]_{\lim_{t \rightarrow -\infty}}^{\lim_{t \rightarrow +\infty}} + \int_{-\infty}^{+\infty} 3t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 3E(U^2) = 3V(U) = 3.$$

(b) On a $Y_1 = M_1^2$. Ainsi :

$$E(Y_1) = E(M_1^2) = V(M_1) + E(M_1)^2 = 1 + m_1^2 = 1 + \lambda_1.$$

De même,

$$E(Y_1^2) = E(M_1^4) = E(((M_1 - m_1) + m_1)^4).$$

Posons $U_1 = M_1 - m_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Alors :

$$E(Y_1^2) = E((U_1 + m_1)^4) = E(U_1^4) + 4m_1 E(U_1^3) + 6m_1^2 E(U_1^2) + 4m_1 E(U_1) + m_1^4 = 3 + 6m_1^2 + m_1^4.$$

On obtient donc :

$$V(Y_1) = E(Y_1^2) - E(Y_1)^2 = 3 + 6m_1^2 + m_1^4 - (1 + m_1^2)^2 = 2 + 4m_1^2 = 2 + 4\lambda_1.$$

(c) Soit $s \in \mathbb{R}$. On a :

$$s \in \mathcal{D}_{Y_1} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st^2} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2}} dt \text{ converge} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st^2} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2} + st^2} dt \text{ converge}.$$

- Si $s \neq \frac{1}{2}$ L'exposant est équivalent à $(s - \frac{1}{2})t^2$. Ainsi :
 - * si $s < \frac{1}{2}$, d'après les croissances comparées, $e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2} + st^2} = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, d'où la convergence de l'intégrale, donc $s \in \mathcal{D}_{Y_1}$.
 - * Si $s > \frac{1}{2}$, $1 = o\left(e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2} + st^2}\right)$ et on obtient la divergence, donc $s \notin \mathcal{D}_{Y_1}$.
- Si $s = \frac{1}{2}$, alors l'exposant est équivalent à $m_1 t$, et suivant le signe de m_1 , on obtient soit $1 = o_{+\infty}\left(e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2} + st^2}\right)$ soit $1 = o_{-\infty}\left(e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2} + st^2}\right)$, d'où encore la divergence.

Ainsi, $\Delta_{Y_1} =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

Soit $s \in]-\infty, \frac{1}{2}[$. On a :

$$\begin{aligned} \Phi_{Y_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2} + st^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-2s)\frac{t^2 - 2t\frac{m_1}{(1-2s)} + \frac{m_1^2}{(1-2s)^2}}}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-2s)\frac{\left(t - \frac{m_1}{(1-2s)}\right)^2 - \frac{m_1^2}{(1-2s)^2} + \frac{m_1^2}{(1-2s)^2}}}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{sm_1^2}{1-2s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-2s)\frac{\left(t - \frac{m_1}{(1-2s)}\right)^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

Puisque $1 - 2s > 0$, on peut effectuer le changement de variables affine strictement croissant (donc valide) $u = \sqrt{1-2s} \cdot \left(t - \frac{m_1}{(1-2s)}\right)$. Il vient :

$$\Phi_{Y_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{sm_1^2}{1-2s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-2s}},$$

et en utilisant la densité de la loi normale centrée réduite (ou le calcul de l'intégrale de Gauss), il vient :

$$\Phi_{Y_1}(s) = \frac{e^{\frac{sm_1^2}{1-2s}}}{\sqrt{1-2s}} = (1-2s)^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(\frac{s\lambda_1}{1-2s}\right).$$

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

(a) On a (en utilisant l'indépendance des M_j , donc des M_j^2 , pour le calcul de la variance, et en utilisant les expressions de $E(M_1)$ et $V(M_1)$ obtenues en II-1, et se généralisant évidemment pour j quelconque) :

- $E(Y_n) = \sum_{i=1}^n E(M_j) = \sum_{i=1}^n (1 + m_i^2) = n + \lambda_n.$
- $V(Y_n) = \sum_{i=1}^n V(Y_j) = \sum_{i=1}^n (2 + 4m_i^2) = 2n + 4\lambda_n.$

- (b) Les variables M_j^2 étant mutuellement indépendantes, on a, d'après la troisième propriété admise dans le préambule, pour tout $s \in]-\infty, \frac{1}{2}]$:

$$\Phi_{Y_n}(s) = E(e^{sM_1^2} e^{sM_2^2} \dots e^{sM_n^2}) = \prod_{i=1}^n E(sM_i^2) = \prod_{i=1}^n \Phi_{M_i^2}(s).$$

Ainsi, d'après le calcul effectué pour $M_1^2 = Y_1$, on obtient :

$$\Phi_{Y_n}(s) = \prod_{i=1}^n (1-2s)^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(\frac{sm_1^2}{1-2s}\right) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{s}{1-2s} \sum_{i=1}^n m_i^2\right) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{s\lambda_n}{1-2s}\right).$$

Partie III – Nombre aléatoire de degrés de liberté

1. (a) Sachant que $[K = k]$ est réalisé, X est la valeur maximale prise par les variables $J_1, \dots, J_k$. Ainsi, sachant que $[K = k]$ est réalisé, $[X \leq x]$ est réalisé si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $J_i \leq x$ est réalisé. Ainsi,

$$P_{[K=k]}(X \leq x) = P_{[K=k]} \left(\bigcap_{i=1}^k [J_i \leq x] \right) = P \left(\bigcap_{i=1}^k [J_i \leq x] \right),$$

car K est indépendante des J_i (donc la connaissance d'une condition sur K ne modifie pas la probabilité d'un événement ne dépendant que des J_i). Ainsi,

$$P_{[K=k]}(X \leq x) = P \left(\bigcap_{i=1}^k [J_i \leq x] \right) = P(X_k \leq x).$$

- (b) On a, d'après la formule des probabilités totales sur le système complet $([K = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ (chacun de ces événements étant de probabilité $\frac{1}{n}$, donc non quasi-impossible) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X \leq x) = \sum_{k=1}^n P_{[K=k]}(X \leq x) P(K = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(X_k \leq x).$$

Or, en continuant le calcul de la question précédente, et en utilisant l'indépendance des J_i , pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(X_k \leq x) = P \left(\bigcap_{i=1}^k [J_i \leq x] \right) = \prod_{i=1}^k P(J_i \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^k & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^k = \frac{x}{n} \cdot \frac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- (c) Pour montrer que X est une variable à densité, il suffit de montrer que F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, et continue partout.

Par l'expression de F_X définie par morceaux, elle coïncide sur les ouverts $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ces ouverts, donc sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Il reste à montrer la continuité en 0 et en 1 :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{n} \cdot \frac{1-x^n}{1-x} = 0 \times 1 = 0$.
Ainsi, F_X est continue en 0.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_X(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{1-x^n}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{n} (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = 1$.
Ainsi, F_X est continue en 1.

Par conséquent, X est bien une variable aléatoire à densité.

De plus, X admet une espérance, car elle prend ses valeurs dans un ensemble borné, $[0, 1]$ en l'occurrence.

Enfin, on a alors une densité de X , que l'on exprime sous forme d'une somme (en gardant l'expression comme somme géométrique de F_X) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kx^{k-1} & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant la linéarité des intégrales (non impropres) (dans le cas de sommes finies) :

$$E(X) = \frac{1}{n} \int_0^1 \left(x \sum_{k=1}^n kx^{k-1} \right) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1}.$$

(d) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$g(k) = E(X \mid K = k) = E(X_k),$$

car, la loi conditionnelle sachant $K = k$ de X est égale à la loi de X_k . Or, d'après le calcul de F_{X_k} effectué en 1(b), une densité de X_k est : $x \mapsto kx^{k-1}$ sur $[0, 1]$, et est nulle ailleurs. Ainsi :

$$g(k) = E(X_k) = \int_0^1 x \cdot kx^{k-1} dx = \frac{k}{k+1}.$$

D'après le théorème de transfert, on a donc :

$$E(g(K)) = \sum_{k=1}^n g(k)P(X = k) = \sum_{k=1}^n E(X \mid X = k)P(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{n} = E(X).$$

Vous remarquerez que l'utilisation du théorème de transfert met en lumière le rapport entre $E(g(K))$ et la formule de l'espérance totale.

2. (a) C'est le même raisonnement qu'en 1(a), qui nous permet d'enlever la condition sur K (il manquait un mot « indépendant » dans l'énoncé, je suppose que vous avez su compléter le texte...) On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_{[K=k]}(H_n \leq x) = P_{[K=k]}(U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_{n+2k}^2 \leq x) = P(U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_{n+2k}^2 \leq x) = F_{W_{n+2k}}(x),$$

d'après la définition de (W_n) en partie I

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, K suivant une loi de Poisson, $P(K = k) \neq 0$, donc :

$$g(k) = E(X \mid K = k) = E(e^{sH_n} \mid K = k) = E(e^{sW_{n+2k}}),$$

d'après la question précédente. Ainsi :

$$g(k) = \Phi_{W_{n+2k}}(s) = (1 - 2s)^{-\frac{n}{2} - k}.$$

(c) On a alors, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(g(K)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)P(K = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - 2s)^{-\frac{n}{2} - k} \frac{\lambda^k}{2^k k!} e^{-\frac{\lambda}{2}} \\ &= (1 - 2s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{2(1 - 2s)} \right)^k \\ &= (1 - 2s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}} e^{\frac{\lambda}{2(1 - 2s)}} = (1 - 2s)^{-\frac{n}{2}} \times \exp\left(\frac{\lambda s}{1 - 2s}\right). \end{aligned}$$

(d) En utilisant la formule de l'espérance totale, nous arrivons donc à :

$$E(g(K)) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(X \mid K = k)P(K = k) = E(X) = E(e^{sH_n}) = \Phi_{H_n}(s).$$

Ainsi, pour tout $s \in \mathcal{D}_{H_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$,

$$\Phi_{H_n}(s) = (1 - 2s)^{-\frac{n}{2}} \times \exp\left(\frac{\lambda s}{1 - 2s}\right) = \Phi_{Y_n}(s),$$

avec $\lambda_n = \lambda$. Ainsi, H_n suit une loi du khi-deux décentrée, de paramètres (n, λ) , d'après la première propriété admise en préambule.

(e) Toujours d'après la formule de l'espérance totale :

$$E\left(\frac{1}{H_n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(\frac{1}{H_n} \mid K = k\right) P(K = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(\frac{1}{W_{n+2k}}\right) P(K = k).$$

Or, pour tout $r \geq 3$, $W_r \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{r}{2})$, dont une densité est rappelée en début de partie I. Ainsi, d'après le théorème de transfert, et en se ramenant à une loi $\Gamma(2, \frac{r-2}{2})$ (ce qui est possible car $r \geq 3$) :

$$E\left(\frac{1}{W_r}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} \cdot x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{\Gamma(\frac{r}{2}-1)}{\Gamma(\frac{r}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}-1} \Gamma(\frac{r}{2}-1)} \cdot x^{\frac{r}{2}-2} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{r-2},$$

d'après la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, valable pour tout $x > 0$.

Ainsi, puisque n est supposé supérieur ou égal à 3, on peut utiliser ce résultat ici pour obtenir :

$$E\left(\frac{1}{H_n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2k-2} P(K=k) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right),$$

la dernière égalité découlant du théorème de transfert.

Partie IV – Estimateur de James-Stein

1. Les estimateurs $\hat{\theta}_i$ étant des estimateurs sans biais de θ_i , on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $E(\hat{\theta}_i) = \theta_i$. Ainsi, ces estimateurs suivent des lois normales de variance 1, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\hat{\theta}_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta_i, 1)$. Ces variables sont supposées mutuellement indépendantes. Ainsi, par définition de la loi du khi-deux décentrée donnée en début de partie II, $B_p \hookrightarrow \chi(p, b_p)$. De plus d'après II-2(a), $E(B_p) = p + b_p \neq b_p$. Comme il s'agit d'une statistique à valeurs positives, définie indépendamment de b_p , c'est un estimateur biaisé de b_p .
2. On pose : $\theta^* = \left(1 - \frac{c}{B_p}\right) \times \hat{\theta}$, où c est un paramètre strictement positif. Soit K une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{b_p}{2}$.
 - (a) D'après les questions III-2(d) et III-2(e), une variable aléatoire X suivant une loi $\chi(n, \lambda)$ vérifie $E\left(\frac{1}{X}\right) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right)$, où $K \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. Ainsi, en prenant $\lambda = b_p$, $n = p$, K est alors la variable décrite dans cette question, et on a :

$$E\left(\frac{1}{B_p}\right) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right).$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta) &= E\left(\sum_{i=1}^p \left(\left(1 - \frac{c}{B_p}\right) \times \hat{\theta}_i - \theta_i\right)^2\right) - E\left(\sum_{i=1}^p (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\left(1 - \frac{c}{B_p}\right) \times \hat{\theta}_i - \theta_i\right)^2 - (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2\right)\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^p \left(-\frac{c}{B_p} \hat{\theta}_i\right) \left(\left(2 - \frac{c}{B_p}\right) \hat{\theta}_i - 2\theta_i\right)\right) \\ &= E\left(\frac{c}{B_p} \left(\frac{c}{B_p} - 2\right) \sum_{i=1}^p (\hat{\theta}_i)^2\right) + 2cE\left(\frac{1}{B_p} \sum_{i=1}^p \theta_i \hat{\theta}_i\right) \\ &= E\left(c \left(\frac{c}{B_p} - 2\right)\right) + 2cE\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right) \\ &= -2c + c^2E\left(\frac{1}{B_p}\right) + 2cE\left(1 - \frac{p-2}{p-2+2K}\right) \\ &= -2c + c^2E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) + 2c - 2c(p-2)E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \\ &= (c^2 - 2c(p-2))E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right). \end{aligned}$$

- (b) La variable K est à valeurs positives ou nulles, et $p \geq 3$, donc la variable $\frac{1}{p-2+2K}$ est à valeurs strictement positives, donc $E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) > 0$. Ainsi l'inégalité $R(\theta^*, \theta) < R(\hat{\theta}, \theta)$ est vérifiée si et seulement si : $c^2 - 2c(p-2) < 0$ donc si et seulement si c est situé strictement entre les deux racines du polynôme $X^2 - 2X(p-2)$ (le coefficient dominant étant positif). Or, ces deux racines sont 0 et $2(p-2)$. Ainsi, on a $R(\theta^*, \theta) < R(\hat{\theta}, \theta)$ si et seulement si $0 < c < 2(p-2)$.

De plus, $R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta)$ au point c qui minimise la fonction polynomiale $x \mapsto x^2 - 2x(p-2)$.

Un calcul rapide de dérivée (ou un argument de symétrie des paraboles permettant de dire que l'extremum est atteint au milieu de l'intervalle défini par les deux racines) montre que cette valeur de c est $c = p-1$.

On a alors :

$$\theta^* = \left(1 - \frac{p-1}{B_p}\right) \hat{\theta}.$$

Que demande-t-on de plus??