DM n° 12 : Fonctions de plusieurs variables

Correction de l'exercice 1 –

1. **Étude de deux fonctions auxiliaires**

(a) i. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi g' s'annule en 2, et $g(2) = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. De plus, d'après les croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$

Enfin, $g(x) = 0$ si et seulement si $1 - x = 0$, donc si et seulement si $x = 1$.
On obtient donc le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$	$\nearrow$	0

ii. La fonction g est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$, donc injective sur cet intervalle (ici, nul besoin de la continuité et du théorème de la bijection !)

(b) i. Tout d'abord, déterminons h'. Pour cela, commençons par observer que j est de classe $\mathcal{C}^2$, comme composées, produits et sommes de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi, h' et h'' existent, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^{x} + (1-x)\mathrm{e}^{x} = (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{x}.$$

En dérivant une nouvelle fois, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h''(x) = -\mathrm{e}^{1-x} - (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{x} = (x-2)\mathrm{e}^{1-x} - (1+x)\mathrm{e}^{x}.$$

Sur l'intervalle $[0,1]$, $x \mapsto x-2$ est strictement négatif, et $x \mapsto 1+x$ est positif. Les exponentielles étant aussi strictement positives, il en résulte que h'' est strictement négative sur $[0,1]$, donc h' est strictement décroissante sur $[0,1]$.

ii. Ainsi, h' est strictement décroissante sur $[0,1]$, continue, et $h'(0) = \mathrm{e} > 0$, et $h'(1) = -\mathrm{e} < 0$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, h' se corestreint en une bijection de $[0,1]$ sur $[-\mathrm{e}, \mathrm{e}]$. Comme $0 \in [-\mathrm{e}, \mathrm{e}]$, 0 admet un unique antécédent par h', ce qui signifie précisément que h' s'annule en une unique valeur α.

On peut remarquer (on peut pour cela partir de la constatation que x et $1-x$ jouent un rôle symétrique, ce qui va induire une symétrie par rapport à la valeur $\frac{1}{2}$) que $h'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Ainsi, $\alpha = \frac{1}{2}$ est la seule valeur annulant h'.

iii. Puisque h' est continue sur $[0,1]$, et ne s'annule qu'en $\frac{1}{2}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, h' garde un signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$, et sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Ces signes sont donnés par les valeurs en 0 et en 1 calculées plus haut. Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant pour h :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{\mathrm{e}}$	$\searrow$	1

Par conséquent, $\min\limits_{x\in[0,1]} h(x) = 1$ et $\max\limits_{x\in[0,1]} h(x) = \sqrt{\mathrm{e}}$. De plus, h atteint son minimum aux deux points 0 et 1, alors qu'il atteint son maximum en l'unique valeur $\frac{1}{2}$.

2. **Étude des extrema locaux**

(a) Les fonctions $(x,y,z) \mapsto x+y$, $(x,y,z) \mapsto x+z$ et $(x,y,z) \mapsto y+z$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$, en tant que fonctions polynomiales. La fonction exponentielle étant aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, par composition, les fonctions $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^{x+y}$, $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^{y+z}$ et $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^{x+z}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. La fonction f est donc une somme de produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$, donc elle est elle-même de classe $\mathcal{C}^2$.

(b) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$, elle admet un gradient en tout point de $\mathbb{R}^3$:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} \\ x\mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} \\ x\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $A = (x,y,z)$ un point critique de f.

i. On a donc :

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & = 0 \\ x\mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & = 0 \\ x\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} & = 0 \end{cases}$$

En soustrayant les deux premières lignes, il vient :

$$(1-x)\mathrm{e}^{y+z} - (1-y)\mathrm{e}^{x+z} = 0,$$

donc, en multipliant par $\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$,

$$(1-x)\mathrm{e}^{-x} = (1-y)\mathrm{e}^{-y} \qquad \text{donc:} \qquad g(x) = g(y).$$

On obtient de même $g(y) = g(z)$ en soustrayant les deux dernières lignes.

ii. Supposons que $x > 2$. Alors $g(x) < 0$. Donc $g(y) < 0$ et $g(z) < 0$. Or, d'après la question 1(a)(i), g prend des valeurs positives ou nulles sur $]-\infty, 1]$, donc $y > 1$ et $z > 1$.
Cela n'est pas possible, car alors

$$\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} > 0,$$

donc la première coordonnée du gradient n'est pas nulle, donc $A = (x,y,z)$ ne peut pas être un point critique, contrairement à l'hypothèse faite.

iii. On en déduit que $x \in]-\infty, 2]$, et un raisonnement similaire permet d'affirmer que $y \in]-\infty, 2]$ et $z \in]-\infty, 2]$. On a prouvé ci-dessus que g est injective sur $]-\infty, 2]$, donc l'égalité $g(x) = g(y) = g(z)$ amène $x = y = z$. En remplaçant dans une des trois équations y et z par x, il vient donc :

$$(1+2x)\mathrm{e}^{2x} = 0, \qquad \text{puis:} \qquad x = y = z = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, le point $A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ est l'unique point critique de f.

(d) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$, sa hessienne existe, et s'obtient en dérivant par rapport à chacune des trois variables les trois coordonnées du gradient. Ainsi :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} \\ \mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & x\mathrm{e}^{y+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & x\mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} \\ \mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} & x\mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} & x\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} \end{pmatrix}.$$

Au point $A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, il vient donc :

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mathrm{e}} & \frac{3}{2\mathrm{e}} & \frac{3}{2\mathrm{e}} \\ \frac{3}{2\mathrm{e}} & -\frac{1}{\mathrm{e}} & \frac{3}{2\mathrm{e}} \\ \frac{3}{2\mathrm{e}} & \frac{3}{2\mathrm{e}} & -\frac{1}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\nabla^2 f(A) + \frac{5}{2} I_3$ est une matrice de rang 1, donc $-\frac{5}{2}$ est une valeur propre de A. L'espace propre associé est de dimension 2. De plus,

$$\nabla^2 f(A) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, 2 est valeur propre de $\nabla^2 f(A)$. La somme des dimensions des espaces propres étant au plus égale à 3, il ne peut pas y avoir d'autre valeur propre.

(e) Ainsi, la hessienne de f en A admet deux valeurs propres de signe strictement opposé, donc f n'admet pas d'extremum local au point A.
Comme $\mathbb{R}^3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert, un point en lequel f admet un minimum ou un minimum est nécessairement un point critique de f. Or, l'unique point critique de f ne correspond pas à un extremum local, donc non plus à un extremum global. Ainsi, f n'admet ni maximum ni minimum sur $\mathbb{R}^3$.

3. **Étude d'une restriction**

Soit $\mathcal{C}$ la contrainte $x+y+z=1$.

(a) Soit $\mathcal{H}$ le plan vectoriel associé à la contrainte affine $\mathcal{C}$. Ainsi, $\mathcal{H}$ est le plan d'équation $x+y+z=0$, donc $\mathcal{H}^{\perp} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Par définition, $B=(x,y,z)$ est un point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$ si et seulement si $B \in \mathcal{C}$ et si $\nabla f(B) \in \mathcal{H}^{\perp}$

Cette deuxième condition donne l'égalité des différentes coordonnées du gradient au point B, donc :

$$\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} = x\mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} = x\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y}$$

En soustrayant le premier et le second terme, on se retrouve avec la même expression qui dans la question 2(c)(i) nous a permis d'obtenir l'égalité $g(x)=g(y)$. Ainsi, cette égalité est encore vraie ici. De même $g(y)=g(z)$, d'où l'égalité des trois termes $g(x)=g(y)=g(z)$.

(b) De même que dans la question 2, si on suppose que $x>2$, alors $y>1$ et $z>1$, donc $x+y+z>4>1$, ce qui contredit l'appartenance de B à $\mathcal{C}$. De même si $y>2$ ou si $z>2$. Ainsi, on a $x \leqslant 2$, $y \leqslant 2$ et $z \leqslant 2$, et $g(x)=g(y)=g(z)$. Comme g est injective sur $]-\infty,2]$, on en déduit que $x=y=z$.

Enfin, puisque $B \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire $x+y+z=1$, on en déduit que :

$$x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Ainsi, f admet un unique point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$, le point $B=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

(c) Justifions d'abord que D est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^3$.

- Tout d'abord, pour tout $(x,y,z) \in \Delta$, puisque $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$, l'égalité $x+y+z=1$ amène $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ et $0 \leqslant z \leqslant 1$. Ainsi, D est inclus dans le cube (borné) $[0,1]^3$. Ainsi, D est borné
- De plus, $\mathbb{R}_+$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$, donc le produit cartésien $(\mathbb{R}_+)^3$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$ Enfin, soit $k:(x,y,z) \mapsto x+y+z$. La fonction k est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonction polynomiale, et $\{1\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$, donc $k^{-1}(\{1\})$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$. Or,

$$D = (\mathbb{R}_+)^3 \cap k^{-1}(\{1\}),$$

donc D est l'intersection de deux fermés, donc D est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi, f étant continue sur le sous-ensemble fermé borné D, f est bornée et atteint ses bornes sur D. Ainsi, f admet un minimum et un maximum sur D.

Soit $U=\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*) \mid x+y+z=1\}$, $F_1=\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x+y+z=1, x=0\}$, $F_2=\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x+y+z=1, y=0\}$ et $F_1=\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x+y+z=1, z=0\}$. Ainsi,

$$D = U \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3.$$

- Soit $\tilde{f}$ la restriction de f à l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^3$. La recherche des extrema de f sur U est donc équivalente à la recherche des extrema de $\tilde{f}$ sous la contrainte $\mathcal{C}$. Comme $\tilde{f}$ est définie sur un ouvert, un extremum est nécessairement atteint en un point critique sous contrainte. Nous avons montré que le seul point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ est $B=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, qui correspond donc à l'unique point de U candidat à accueillir un minimum ou un maximum de f sur U. En ce point, on obtient :

$$f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}.$$

- Soit $(x,y,z) \in F_1$. Alors $x+y+z=1$ et $x=0$, donc $z=1-y$. Ainsi,

$$F_1 = \{(0,y,1-y),\ y \in [0,1]\}$$

On obtient, pour tout $y \in [0,1]$:

$$f(0,y,1-y) = y\mathrm{e}^{1-y} + (1-y)\mathrm{e}^{y} = h(y).$$

Or, h admet sur $[0,1]$ un minimum égal à 1, atteint aux deux points 0 et 1, et un minimum égal à $\sqrt{\mathrm{e}}$, atteint en $\frac{1}{2}$. Donc f admet sur F_1 un minimum égal à 1, atteint aux deux points $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$, et un maximum égal à $\sqrt{\mathrm{e}}$, atteint au point $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
- De même, f admet sur F_2 un minimum égal à 1, atteint aux point $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ et un maximum $\sqrt{\mathrm{e}}$ atteint en $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$.
- De même, f admet sur F_3 un minimum égal à 1, atteint aux points $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$, et un maximum $\sqrt{\mathrm{e}}$ atteint en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

Puisque $\mathrm{e} > 1$, on a $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} > \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$, donc finalement :

- f admet sur D un minimum, égal à 1, atteint aux trois points $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ (les sommets du domaine triangulaire D)
- f admet sur D un maximum égal à $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$, atteint en l'unique point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (centre du triangle équilatéral D).

Correction de l'exercice 2 – (d'après INSEEC 2001)

1. (a) • La matrice $M - I_3$ est de rang 1, donc 1 est valeur propre de M, et $\dim E_1 = 2$. De plus, les colonnes de $M - I_3$ vérifient les relations $C_1 - C_2 = 0$ et $C_1 - C_3 = 0$, donc $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1$, et $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1$.
Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une famille libre de E_1, et E_1 étant de dimension 2, ils forment une base de E_1.

• Les colonnes de M vérifient $C_1 + C_2 + C_3 = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi :

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, 4 est valeur propre de M, et $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_4$. Comme on a déjà E_1 de dimension 2, la dimension de E_4 ne peut pas excéder 1, donc $E_4 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) La matrice M étant symétrique, $E_1 \perp E_4$. Il suffit alors de déterminer une base orthonormale de chaque espace propre. E_4 étant de dimension 1, il suffit de considérer :

$$f_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour E_1, on peut décider d'orthonormaliser la base (b_1, b_2), ou alors d'essayer de trouver directement deux vecteurs orthogonaux de E_1. On peut remarquer par exemple que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $b_1 \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$. Il suffit de choisir c de sorte que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$ soit dans E_1. On pose donc :

$$b_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une base orthonormale de E_1 est constituée par exemple des vecteurs :

$$f_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Alors, (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M.

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$, en tant que fonction polynomiale. On peut calculer son gradient :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 x_3 (2x_1 + x_2 + x_3 - 4) \\ x_1 x_3 (x_1 + 2x_2 + x_3 - 4) \\ x_1 x_2 (x_1 + x_2 + 2x_3 - 4) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en supposant que $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ et $x_3 \neq 0$, $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{soit:} \qquad M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Or, la matrice M est inversible, donc $X \mapsto MX$ est bijective. Ainsi, il existe un unique vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tel que $M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus on a : $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. On pose : $\forall h \in \mathbb{R}^3,\ h = (h_1, h_2, h_3),\quad Q(h) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$, et $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$.

   (a) La forme quadratique Q est la forme quadratique associée à la hessienne de f au point a. Déterminons donc cette hessienne. Nous avons déjà justifié que f est de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui nous permet de calculer cette hessienne, et d'utiliser le théorème de Schwarz. Pour tout (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$,

   $$\nabla^2 f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_2x_3 & x_3(2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4) & x_2(2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4) \\ x_3(2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4) & 2x_1x_3 & x_1(x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) \\ x_1(x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) & x_2(2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4) & 2x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

   En particulier, on obtient :

   $$\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = M.$$

   Ainsi, Q est bien la forme quadratique associée à la matrice symétrique M, donc, pour tout $h \in \mathbb{R}^3$,

   $$Q(h) = {}^tHMH.$$

   (b) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale constituée dans l'ordre de deux vecteurs de E_1 et d'un vecteur de E_4 (l'existence de cette base orthonormale découle de la symétrie de M). Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. La formule de changement de base permet alors d'affirmer que $M = PDP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Ces deux bases étant orthonormales, P est une matrice orthogonale, donc $P^{-1} = {}^tP$, d'où la relation $M = PD\,{}^tP$.

   (c) Ici, le but est de démontrer directement la positivité de Q, sans utiliser directement la relation entre le signe des valeurs propres de M et le signe de Q. Nous reprenons donc le raisonnement. On a, pour tout $h \in \mathbb{R}^3$,

   $$Q(h) = {}^tHMH = {}^tHPD\,{}^tPH = {}^tYDY = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2.$$

   Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^3 \setminus z$, $Q(h) > 0$. On en déduit, d'après un théorème du cours (condition suffisante d'extremum du second ordre) que f admet au point a un minimum local.

4. On a :

   $$Q(h) = 2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3) = (h_1 + h_2 + h_3)^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$$

   Ainsi, $Q(h) \geqslant 0$, et $Q(h) = 0$ si et seulement si $h_1 = h_2 = h_3 = 0$. On arrive donc à la même conclusion.

5. Refaisons de même. On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

   $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j \left(x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j - n - 1 \right).$$

   Ainsi, en supposant les x_j tous non nuls, $\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si

   $$\forall i \in [\![1, n]\!],\quad x_1 + \cdots + x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n = n + 1,$$

   donc si et seulement si

   $$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (n+1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ où } M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Or, par la même méthode que pour $n = 3$, on a une valeur propre évidente 1, et $\dim E_1 = n - 1$. De plus,

   $$M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n+1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc on a une deuxième valeur propre, égale à $n+1$, et pour des raisons de dimension, il n'y a pas d'autre valeur propre. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre, donc M est inversible. Or,

$$M\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = (n+1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}, \text{ d'où } \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

Notons $a = (1, \dots, 1)$. Déterminons la hessienne au point a.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_n) = 2\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j.$$

  En particulier,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = 2.$$

- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 2\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i\\ k\neq j}}^{n} x_j \left(x_i + x_j + \sum_{k=1}^{n} x_k - n - 1\right).$$

  En particulier,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = 1.$$

Ainsi, on obtient encore une fois $\nabla^2 f(a) = M$. Cette matrice M n'ayant que des valeurs propres strictement positives, on se permet ici de conclure directement que f admet en a un minimum local.

Correction de l'exercice 3 – (EDHEC 2005)

1. (a) La fonction f est une fonction polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$.

   (b) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = 2x_i + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - 1.$$

   En redérivant cette expression par rapport à i, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X) = 2 + 2 = 4.$$

   De même, en dérivant $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ par rapport à $j \neq i$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) = 2.$$

2. (a) Le point $A = (a_1, \dots, a_n)$ est un point critique de f si et seulement si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 2a_i + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - 1.$$

   Étant donnés i et j, $i \neq j$, on obtient alors :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = 2(a_i - a_j),$$

   donc $a_i = a_j$. Ainsi, $a_1 = a_2 = \dots, = a_j$. L'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(A) = 0$ donne alors

$$2x_1 + 2nx_1 - 1 = 0 \qquad \text{donc:} \qquad x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{2(n+1)}.$$

   Ainsi, f admet un unique point critique sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donné par $A = \left(\frac{1}{2(n+1)}, \dots, \frac{1}{2(n+1)}\right)$.

(b) La hessienne au point A (et en tout point d'ailleurs, cette hessienne étant constante) est, d'après les calculs de la question 2,

$$A_n = \nabla^2 f_A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2J_n + 2I_n = 2(I_n + J_n).$$

3. (a) Les colonnes de J_n vérifient $C_1 = \cdots = C_n \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(J_n) = 1$ (en effet, le rang d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes, donc ici par la colonne C_1, les autres lui étant égales).

   En particulier, puisque $n \geqslant 2$, $\mathrm{rg}(A_n) < n$, donc A_n n'est pas inversible, donc, en notant φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A_n, $\mathrm{Ker}(\varphi_n) \neq \{0\}$, donc 0 est valeur propre de A_n.

   Remarque : évitez dans la mesure du possible la notation $\mathrm{Ker}\, A$ pour une matrice. Travaillez plutôt sur l'endomorphisme canoniquement associé.

   De plus, notons E_0 le sous-espace propre de A_n associé à la valeur propre 0. On a alors, d'après le théorème du rang (on est en dimension finie) :

$$\dim E_0 = \dim Ker\varphi_n = \dim \mathbb{R}^n - \mathrm{rg}\, \varphi_n = n - 1.$$

   (b) On a, en notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de J_n :

$$J_n \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 + \cdots + C_n = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) De la question b, on déduit que n est valeur propre de J_n, un vecteur propre associé étant $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   La somme des dimensions des espaces propres ne pouvant être supérieure à n, et E_0 étant de dimension $n-1$, E_n de dimension au moins 1, on en déduit qu'il ne peut pas exister d'autres valeurs propres (puisque chaque valeur propre rajouterait au moins 1 à la somme des dimensions des espaces propres), et que $\dim E_n = 1$.

   Ainsi, $\mathrm{Sp}(J_n) = \{0, n\}$.

   De plus, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_n)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(2(\varphi_n + \mathrm{id}) - \lambda \mathrm{id}) \neq 0$, si et seulement si $\mathrm{Ker}\left(\varphi_n - \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) \mathrm{id}\right) \neq 0$, si et seulement si $\frac{\lambda}{2} - 1 \in \mathrm{Sp}(J_n)$.

   Ainsi $\mathrm{Sp}(A_n) = \{1, 2n+1\}$.

4. (a) Un résultat du cours affirme que c'est le cas, puisque la hessienne possède uniquement des valeurs propres strictement positives.

   On peut le prouver directement aussi :

$${}^tHA_nH = 4\sum_{i=1}^n h_i^2 + 4 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_i h_j = 2\sum_{i=1}^n h_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} h_i h_j = 2\sum_{i=1}^n h_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n h_i\right)^2 \geqslant 0.$$

   De plus, on a l'égalité si et seulement si tous les carrés ci-dessus sont nuls, donc en particulier $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$. D'où le résultat.

   (b) D'après la condition suffisante d'ordre 2 pour l'existence d'une extremum local en un poinbt critique, f admet donc un minimum local en $(a_1, \dots, a_n)$. Ce minimum est donné par :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2(n+1)}, \dots, \frac{1}{2(n+1)}\right) &= \frac{n}{4(n+1)^2} + \left(\frac{n}{2(n+1)}\right)^2 - \frac{n}{2(n+1)} = \frac{n + n^2 - 2n(n+1)}{4(n+1)^2} \\ &= \frac{-n^2 - n}{4(n+1)^2} = \frac{-n}{4(n+1)}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 –

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, et

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x_1^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{1+x_n^2} \end{pmatrix}.$$

   Le gradient ne peut donc pas s'annuler, donc f n'admet pas de point critique, donc pas d'extremum local, ni global sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$, et soit $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid x_1 + \cdots + x_n = s\}$.

(a) $D = (\mathbb{R}_+)^n \cap \varphi^{-1}(\{s\})$, où φ est définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}^n$ et $\{s\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(s)$ est fermé. De plus, $(\mathbb{R}_+)^n$ est fermé en tant que produit cartésien d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$. Ainsi, leur intersection D est aussi fermée.

Par ailleurs, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in D$, comme les x_i sont tous positifs, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad 0 \leqslant x_k \leqslant x_1 + \cdots + x_n = 1,$$

donc $D \subset [0,1]^n$. Ainsi, D est bornée.

f étant continue sur l'ensemble fermé borné D, f y admet un maximum.

(b) Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan vectoriel d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. On a $\mathcal{H}^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $A = (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ est un point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ si et seulement si $A \in \mathcal{C}$ et $\nabla f(A)$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette dernière condition amène l'égalité des coefficients de $\nabla f(A)$, donc

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \frac{1}{1 + x_i^2} = \frac{1}{1 + x_j^2} \qquad \text{donc:} \qquad x_i^2 = x_j^2,$$

et comme les x_i sont supposés tous positifs, $x_i = x_j$. Ainsi, $x_1 = \cdots = x_n$. Comme $x_1 + \cdots + x_n = s$, on obtient un unique point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$, égal à $A = \begin{pmatrix} \frac{s}{n} \\ \vdots \\ \frac{s}{n} \end{pmatrix}$.

(c) La matrice hessienne de f est

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(X) = \begin{pmatrix} \frac{-2x_1}{(1+x_1^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2x_n}{(1+x_n^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant diagonale, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, si $X \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $\nabla^2 f(X)$ n'a que des valeurs propres strictement négatives, donc la forme quadratique associée q_X ne prend que des valeurs strictement négatives, sauf en 0 où la valeur est nulle.

Ainsi, d'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre A et un point $B \in D$ différent de A (on vérifie sans problème que $[A, B] \subset D$, et $B - A \in \mathcal{H}$, donc $B - A \perp \nabla f(A)$), on a l'existence de $C \in]A, B[$ (il est donc dans $(\mathbb{R}_+^*)^n$), tel que

$$f(B) = f(A) + \langle B - A, \nabla f(A) \rangle + q_C(B - A) = f(A) + q_C(B - A) > f(A).$$

Ainsi, f présente en A un maximum strict sur D. Ce maximum vaut $n \operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{n}\right)$.

(d) Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in T$ et soit $s' = x_1 + \cdots + x_n \leqslant s$.

D'après la question précédente, appliquée avec s' au lieu de s, on a

$$f(x_1, \cdots, x_n) \leqslant n \operatorname{Arctan}\left(\frac{s'}{n}\right) \leqslant n \operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{n}\right) = f(A),$$

par croissance de l'arctangente. Ainsi, le maximum de f sur T est $\operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{n}\right)$.