

DM n° 2 – Série
DEVOIR FACULTATIF

Correction du problème – Équivalents et développements asymptotiques de séries liées aux diviseurs

On admet, dans l'ensemble du problème les deux résultats suivants :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \textit{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

Questions préliminaires

1. Soit $\varepsilon > 0$.
   Puisque $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier N' tels que pour tout $n \geqslant N'$, $a_n = \lambda_n b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 1$. Alors, par définition des limites,
   $$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant N,\quad 1-\varepsilon \leqslant \lambda_k \leqslant 1+\varepsilon.$$
   Soit une telle valeur de N, qu'on peut choisir supérieure à N'. En multipliant pour tout $k \geqslant N$ cette inégalité par b_k, qui est positif, on obtient :
   $$\forall k \geqslant N,\quad (1-\varepsilon)b_k \leqslant \lambda_k b_k \leqslant (1+\varepsilon)b_k, \qquad \text{soit :} \qquad \forall k \geqslant N,\quad (1-\varepsilon)b_k \leqslant a_k \leqslant (1+\varepsilon)b_k.$$
   Soit $n \geqslant N$. Sommons ces inégalités (valides pour les indices considérés) sur tous les indices $k \geqslant n+1$ (les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ étant convergentes, on peut considérer les sommes jusqu'à l'infini) :
   $$(1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$
   Conclusion : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ (1-\varepsilon)s_n \leqslant r_n \leqslant (1+\varepsilon)s_n$.
2. Si la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang (donc si $\exists N,\ \forall n \geqslant N,\ b_n = 0$), alors, avec les notations précédentes, pour tout $n \geqslant \max(N,N')$, $a_n = \lambda_n b_n = 0$. Alors, pour tout $n \geqslant \max(N,N')$, $r_n = s_n = 0$. On peut alors définir, $(\lambda'_n)_{n\geqslant\max(N,N')}$ en posant pour tout $n \geqslant \max(N,N')$, $\lambda'_n = 1$. On a alors :
   $$\forall n \geqslant \max(N,N'),\ r_n = \lambda'_n s_n, \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda'_n = 1.$$
   Ainsi, $r_n \underset{+\infty}{\sim} s_n$. Remarquez qu'il s'agit du cas très particulier d'un équivalent à 0 : seule les suites stationnaires de limite nulle sont équivalentes à 0.

   Si la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang (c'est-à-dire stationnaire de valeur 0, ce qui n'empêche par que certains termes soient nuls), alors, comme elle est à termes positifs :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k > n,\ b_k > 0, \qquad \text{donc} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k > 0, \qquad \text{soit :} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, s_n > 0.$$
   Ainsi, on peut diviser pour tout $n \geqslant N$ l'inégalité de la question 1 par s_n. On obtient :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ (1-\varepsilon) \leqslant \frac{r_n}{s_n} \leqslant (1+\varepsilon).$$
   Par définition des limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{r_n}{s_n} = 1$, donc $r_n \underset{+\infty}{\sim} s_n$.
   Bilan : avant de diviser, assurez-vous toujours que ce par quoi vous divisez est non nul !

PARTIE I – Comportement à l'infini des sommes partielles et restes des séries de Riemann

1. Pour tout $k \geqslant a$, $[k, k+1]$ est inclus dans le domaine de définition de f, et comme f y est décroissante, on a :

$$\forall k \geqslant a,\ \forall x \in [k, k+1],\ \ f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k).$$

La fonction f étant continue, elle est intégrable sur $[k, k+1]$, et on peut donc intégrer l'inégalité précédente sur cet intervalle. Par la croissance de l'intégrale, on trouve :

$$\forall k \geqslant a, \int_k^{k+1} f(k+1)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\ \mathrm{d}x \qquad \text{soit :} \qquad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant f(k).$$

Soit $n \geqslant a$ et $p > n$. On peut sommer la première inégalité pour tout $k \in [\![n, p-1]\!]$. On obtient :

$$\sum_{k=n}^{p-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=n}^{p-1} \int_k^{k+1} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_n^p f(x)\ \mathrm{d}x,$$

d'après la relation de Chasles. En effectuant un changement d'indice, on obtient donc :

$$\sum_{k=n+1}^{p} f(k) \leqslant \int_n^p f(x)\ \mathrm{d}x.$$

De même, on somme la deuxième inégalité pour tout $k \in [\![n+1, p]\!]$. On obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{p} f(k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{p} \int_k^{k+1} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{n+1}^{p+1} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Conclusion : $\forall n \geqslant a,\ \forall p \geqslant n,\quad \displaystyle\int_{n+1}^{p+1} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} f(k) \leqslant \int_n^p f(x)\ \mathrm{d}x.$

2. (a) Soit $\alpha > 1$. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in [1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. La fonction f étant décroissante et continue, on peut appliquer la question précédente : Soit $n \geqslant 1$, alors :

$$\forall p \geqslant n,\ \int_{n+1}^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^p \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha},$$

$$\text{soit:} \qquad \forall p \geqslant n,\ \left[\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{x=n+1}^{x=p+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \left[\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{x=n}^{x=p},$$

$$\text{soit:} \qquad \forall p \geqslant n,\ \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{p^{\alpha-1}}\right).$$

Les trois expressions admettent une limite lorsque p tend vers $+\infty$ (l'expression médiane du fait que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha > 1$). Ainsi, en passant à la limite lorsque p tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

(b) On obtient de la question précédente, en multipliant pour tout $n \geqslant 1$ par $(\alpha-1)n^{\alpha-1} > 0$:

$$\forall n \geqslant 1,\ \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \leqslant (\alpha-1)n^{\alpha-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1.$$

Les deux expressions encadrantes tendent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, donc, d'après le théorème d'encadrement, la limite du terme médian existe, et :

$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha-1)n^{\alpha-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1, \qquad \text{soit:} \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

3. (a) Cette fois, on applique la question 1 dans le cas d'une série divergente. On considère la fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, définie pour tout $x \in [1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Elle est décroissante et continue sur $[1, +\infty[$. On peut donc appliquer les résultats de la question 1, en prenant $n = 1$:

$$\forall p \geqslant 1, \int_2^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \leqslant \int_{k=1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\text{soit:} \qquad \forall p \geqslant 1,\ \ln(p+1) - \ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \leqslant \ln p,$$

$$\text{donc:} \qquad \forall p \geqslant 2,\ 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{p}) - \ln 2}{\ln p} \leqslant \frac{1}{\ln p} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \leqslant 1.$$

Cette dernière inégalité a été obtenue en divisant, pour tout $p \geqslant 2$ par $\ln p > 0$ (remarquez la nécessité de se restreindre à $p \geqslant 2$ pour ce faire).
Ainsi, les deux expressions encadrantes tendant vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$, on en déduit d'après le théorème d'encadrement que l'expression médiane aussi, donc : $\displaystyle\sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k} \underset{p\to+\infty}{\sim} \ln p$.
Comme le terme correspondant à l'indice $k = 1$ de la somme est 1, et que $1 = o(\ln p)$ lorsque p tend vers $+\infty$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \underset{p\to+\infty}{\sim} \ln p$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons v_n :

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

D'après (1), on trouve donc :

$$v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, $\displaystyle\frac{-1}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2}$, donc $\displaystyle\frac{-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi :

$$v_n = \frac{-1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, $\displaystyle v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$. Cette dernière expression étant de signe constant (négatif) pour tout n, et le terme général d'une série convergente (série de Riemann de paramètre $2 > 1$), on en déduit, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs équivalents, que $\sum v_n$ converge, c'est-à-dire $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.
Or, la convergence de cette dernière série équivaut à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisque ses sommes partielles vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} - u_1.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel γ.

(c) Puisque $\displaystyle v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$, et que les séries $\sum v_n$ et $\sum -\frac{1}{2n^2}$ sont à termes négatifs (au moins à partir d'un certain rang pour $\sum v_n$, puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équivalente à une suite négative), on est dans les conditions d'application des questions préliminaires (quitte à tout multiplier par un facteur -1 pour se ramener à des séries à termes positifs). Ainsi :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n},$$

l'avant-dernier équivalent découlant de la question 2a.

(d) Or, pour tout $n \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n}^{N}(u_{n+1}-u_n) = \lim_{N\to+\infty} u_{N+1} - u_n = \gamma - u_n$. Ainsi :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n + \ln n = \ln n + \gamma - \sum_{k=n}^{+\infty} v_n,$$

et, puisque d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

PARTIE II – Comportement à l'infini des sommes partielles de $\sum \sigma_n$

1. Tout nombre n est au moins divisé par 1, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n \geqslant 1$ et $\tau_n \geqslant 1$. Ainsi, les suites $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne convergent pas vers 0 : les séries $\sum \sigma_n$ et $\sum \tau_n$ divergent grossièrement.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sigma_k = \sum_{d|k} 1 = \mathrm{Card}\{d \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } d|k\} = \mathrm{Card}\{d \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \exists q \in \mathbb{N}^*,\ dq = k\}.$$

Pour tout diviseur d de k, cet entier q étant unique, on obtient une bijection :

$$\Phi : \{d \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \exists q \in \mathbb{N}^*,\ dq = k\} \longrightarrow \{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq = k\},$$

en associant à tout diviseur d de k le couple $\Phi(d) = (d,q)$, où q est l'*unique* entier tel que $dq = k$. En effet, on définit une réciproque Ψ en posant pour tout couple (d,q) tel que $dq = k$, $\Psi(d,q) = d$. Clairement $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$, donc Φ est une bijection. On en déduit l'égalité des cardinaux de ces deux ensembles, donc :

$$\sigma_k = \mathrm{Card}\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq = k\}.$$

Ainsi, ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en sommant sur tous les entiers $k \in [\![1,n]\!]$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq = k\} = \mathrm{Card} \bigcup_{k=1}^{n} \{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq = k\} \\ &= \mathrm{Card}\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq \leqslant n\}, \end{aligned}$$

l'avant dernière égalité provenant du fait que les ensembles considérés sont deux à deux disjoints.
3. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq \leqslant n\} = A_n \cup B_n \cup C_n,$$

et que cette union est disjointe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Soit $(d,q) \in \{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq \leqslant n\}$. Alors :
  - soit $d \leqslant \sqrt{n}$. Dans ce cas, puisque $dq \leqslant n$, on a $q \leqslant \frac{n}{d}$. En distinguant suivant la position de q par rapport à $\sqrt{n}$, on aboutit donc soit à $(d,q) \in A_n$, soit à $(d,q) \in B_n$;
  - soit $d > \sqrt{n}$, et dans ce cas, $q \leqslant \frac{n}{d} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n}$. D'autre part, puisque $qd \leqslant n$, on a $d \leqslant \frac{n}{q}$. Ainsi $(d,q) \in C_n$.

  Donc, dans tous les cas, $(d,q) \in A_n \cup B_n \cup C_n$, donc : $\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq \leqslant n\} \subset A_n \cup B_n \cup C_n$.
- * Soit $(d,q) \in A_n$, alors $1 \leqslant d \leqslant \sqrt{n}$ et $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$, donc $dq \leqslant n$.
  * Soit $(d,q) \in B_n$, alors, puisque $q \leqslant \frac{n}{d}$, on a $dq \leqslant n$.
  * Soit $(d,q) \in C_n$, alors, puisque $d \leqslant \frac{n}{q}$, on a $dq \leqslant n$.

  On obtient donc $A_n \cup B_n \cup C_n \subset \{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq \leqslant n\}$.

Les deux inclusions étant satisfaites, on a égalité entre ces deux ensembles. De plus, il apparaît clairement de par leur définition que les trois ensembles A_n, B_n et C_n sont deux à deux disjoints. Ainsi :

$$S_n = \mathrm{Card}\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } dq \leqslant n\} = \mathrm{Card}(A_n \cup B_n \cup C_n) = \mathrm{Card}(A_n) + \mathrm{Card}(B_n) + \mathrm{Card}(C_n).$$

4. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Card}(A_n) = \displaystyle\sum_{(d,q)\in A_n} 1 = \sum_{\substack{d\in\mathbb{N}^* \\ d\leqslant\sqrt{n}}} \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}^* \\ q\leqslant\sqrt{n}}} 1 = \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} \sum_{q=1}^{E(\sqrt{n})} 1 = \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} E(\sqrt{n}) = E(\sqrt{n})^2.$

   (b) On construit une bijection $\varphi : B_n \to C_n$ en posant, pour tout $(d,q) \in B_n$, $\varphi(d,q) = (q,d)$. La fonction φ est clairement à valeurs dans C_n, et admet une réciproque ψ définie sur tout couple $(d,q) \in C_n$ par $\psi(d,q) = (q,d)$. Donc φ est une bijection, et $\mathrm{Card}(B_n) = \mathrm{Card}(C_n)$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(B_n) &= \sum_{(d,q)\in B_n} 1 = \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} \sum_{q=E(\sqrt{n})+1}^{E\left(\frac{n}{d}\right)} 1 = \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} \left(E\left(\frac{n}{d}\right) - E(\sqrt{n})\right) \\ &= \left(\sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{d}\right)\right) - E(\sqrt{n}) \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} 1 = \left(\sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{d}\right)\right) - E(\sqrt{n})^2.\end{aligned}$$

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions 3, 4a, 4b et 4c, on a :

$$\begin{aligned}S_n &= \mathrm{Card}(A_n) + \mathrm{Card}(B_n) + \mathrm{Card}(C_n) = \mathrm{Card}(A_n) + 2\mathrm{Card}(B_n) \\ &= 2\left(\sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{d}\right)\right) - 2E(\sqrt{n})^2 + E(\sqrt{n})^2 = 2\left(\sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{d}\right)\right) - E(\sqrt{n})^2.\end{aligned}$$

   Commençons par encadrer $\displaystyle\sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{d}\right)$.

   Pour tout $d \in [\![1, E(\sqrt{n})]\!]$, $\dfrac{n}{d} - 1 < E\left(\dfrac{n}{d}\right) \leqslant \dfrac{n}{d}$, donc, en sommant :

$$\sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} \left(\frac{n}{d} - 1\right) < \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{d}\right) \leqslant \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{n}{d} = n \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{1}{d}.$$

   De plus, $\sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}$, donc $(\sqrt{n}-1)^2 < E(\sqrt{n})^2 \leqslant n$. Ainsi, on obtient un encadrement de S_n :

$$G_n = \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} 2\left(\frac{n}{d} - 1\right) - n \leqslant S_n \leqslant 2n \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{1}{d} - (\sqrt{n}-1)^2 = D_n.$$

   (Remarquez que je ne mets pas de quantificateur sur la variable n, puisque je l'ai posée en début de question)

5. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

   Ainsi, $\ln(1+u_n) = O(u_n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant E(\sqrt{n}) - \sqrt{n} \leqslant 0$, donc $E(\sqrt{n}) = \sqrt{n} + O(1)$.

   (b) On reconnaît en D_n une somme partielle de la série $\sum \frac{1}{k}$. D'après I-3d, puisque $\frac{1}{E(\sqrt{n})} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$:

$$D_n = 2n\ln(E(\sqrt{n})) + 2n\gamma + nO\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n = 2n\ln(\sqrt{n}) + 2n\ln\left(\frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right) + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n}).$$

   Or, d'après la question précédente : $\ln\left(\dfrac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right) = \ln\left(1 + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   Ainsi : $D_n = n\ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}G_n &= 2n \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{1}{d} - 2\sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} 1 - n = 2n \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{1}{d} - 2E(\sqrt{n}) - n \\ &= D_n + (\sqrt{n}-1)^2 - 2E(\sqrt{n}) - n = D_n - 2\sqrt{n} + 1 - 2E(\sqrt{n}).\end{aligned}$$

(d) Or, $E(\sqrt{n}) = O(\sqrt{n})$, $\sqrt{n} = O(\sqrt{n})$ et $1 = O(\sqrt{n})$ donc :

$$G_n = D_n + O(\sqrt{n}) = n\ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n}).$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est encadré par deux suites qui sont toutes les deux en $n\ln n + (2\gamma-1)n + O(\sqrt{n})$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = G_n - n\ln n + (2\gamma - 1)$ et $v_n = D_n - n\ln n + (2\gamma - 1)$. Alors de l'inégalité de la question 4d, on déduit :

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n\ln n - (2\gamma - 1)n) \leqslant \frac{v_n}{\sqrt{n}}.$$

Or, $u_n = O(\sqrt{n})$, donc $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. De même, $\left(\frac{v_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Ainsi, la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n\ln n - (2\gamma-1)n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, donc, par définition,

$$S_n - n\ln n - (2\gamma - 1)n = O(\sqrt{n}), \qquad \text{soit:} \qquad S_n = n\ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n}).$$

On en déduit que $S_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln n$, puisque $(2\gamma - 1)n = o(n\ln n)$ et $O(\sqrt{n}) = o(n\ln n)$.

(f) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{S_n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha \ln^\alpha n}$. Les séries étant à termes positifs, la nature de $\sum \frac{1}{S_n^\alpha}$ est la même que la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\alpha n}$. Soit, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\alpha n}$.

Si $\alpha > 1$, alors $\forall n \geqslant 2$, $\;n^\alpha u_n = \frac{1}{\ln^\alpha n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$. Ainsi, $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, et comme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha > 1$, donc convergente, il en résulte, d'après un corollaire du théorème de comparaison des séries à termes positifs, que $\sum u_n$ converge. Donc $\sum \frac{1}{S_n^\alpha}$ converge.

Si $\alpha < 1$, alors $\forall n \geqslant 2$, $\;nu_n = \frac{n^{1-\alpha}}{\ln^\alpha n}$. D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$. Ainsi, $\frac{1}{n} = o(u_n)$. Les séries étant à termes positifs, d'après un corollaire du théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge car $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Si $\alpha = 1$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$. Ainsi, d'après la question I-1, pour tout $p \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}
&\int_3^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{p} \frac{1}{k\ln k}\\
\text{soit:}\quad &\frac{1}{2}\Big[(\ln x)^2\Big]_3^{p+1} \leqslant \sum_{k=3}^{p} \frac{1}{k\ln k}\\
\text{soit:}\quad &\frac{1}{2}(\ln^2(p+1) - \ln^2 4) \leqslant \sum_{k=3}^{p} \frac{1}{k\ln k}.
\end{aligned}$$

Or, $\left(\frac{1}{2}(\ln^2(p+1) - \ln^2 4)\right)_{p\geqslant 3}$ diverge vers $+\infty$, donc $\left(\sum_{k=3}^{p} \frac{1}{k\ln k}\right)_{p\geqslant 3}$ aussi.

Ainsi, $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge donc aussi $\sum \frac{1}{S_n}$.

PARTIE III – Comportement à l'infini des sommes partielles de $\sum \tau_n$

1. Comme pour les sommes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{(d,q)\in\{(d,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, dq\leqslant n\}} d = \sum_{q=1}^{n} \sum_{d\leqslant \frac{n}{q}} d = \sum_{q=1}^{n} \sum_{d=1}^{E\left(\frac{n}{q}\right)} d = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{2} E\left(\frac{n}{q}\right)\left(E\left(\frac{n}{q}\right) + 1\right).$$

Désolé pour la malheureuse erreur de signe qui s'était glissée dans l'énoncé.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $q \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{n}{q} - 1 < E\left(\dfrac{n}{q}\right) \leqslant \dfrac{n}{q}$, puis :

$$\frac{n}{q}\left(\frac{n}{q}-1\right) < E\left(\frac{n}{q}\right)\left(E\left(\frac{n}{q}\right)+1\right) \leqslant \frac{n}{q}\left(\frac{n}{q}+1\right).$$

Ainsi, en sommant sur toutes les valeurs de $q \in [\![1,n]\!]$, on obtient :

$$\sum_{q=1}^{n} \frac{n}{q}\left(\frac{n}{q}-1\right) < T_n \leqslant \sum_{q=1}^{n} \frac{n}{q}\left(\frac{n}{q}+1\right).$$

3. D'après la partie I, $\displaystyle\sum_{q=n+1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc $\displaystyle\sum_{q=n+1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{n}\left(\frac{n}{q}\right)^2 &= n^2\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{q^2} = n^2\left(\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2} - \sum_{q=n+1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}\right)\\ &= n^2\left(\frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(\pi n)^2}{6} + O(n) = \frac{(\pi n)^2}{6} + O(n\ln n).\end{aligned}$$

De plus, $\displaystyle\sum_{q=1}^{n}\frac{n}{q} = n\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{q} \underset{+\infty}{\sim} n\ln n$ d'après la partie I.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{q=1}^{n}\frac{n}{q} = O(n\ln n)$. Par conséquent,

$$\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n}\frac{n}{q}\left(\frac{n}{q}-1\right) = \frac{n^2}{2}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{q^2} - \frac{n}{2}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{q} = \frac{(\pi n)^2}{12} + O(n\ln n).$$

De même,

$$\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n}\frac{n}{q}\left(\frac{n}{q}+1\right) = \frac{n^2}{2}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{q^2} + \frac{n}{2}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{q} = \frac{(\pi n)^2}{12} + O(n\ln n).$$

Le même raisonnement que pour $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montre alors que $T_n = \dfrac{(\pi n)^2}{12} + O(n\ln n)$. Ainsi $T_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(\pi n)^2}{12}$.

5. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{T_n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(n\pi)^2}{12} + O(n\ln n)}} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi n}\frac{1}{\sqrt{1+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)}} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi n}\left(1 - \frac{1}{2}O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

6. Attention, on ne peut pas utiliser des équivalents ici, les séries n'étant pas de signe constant. On utilise la question précédente :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{T_n}} = \frac{2\sqrt{3}(-1)^n}{\pi n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$, donc $\dfrac{\ln n}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Ainsi, d'après un corollaire du théorème de comparaison des séries à termes positifs, et les résultats de convergence des séries de Riemann, les séries étant à termes positifs, $\displaystyle\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge, donc aussi $\sum w_n$, où $w_n = O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.
- Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$. Alors :
  - $*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n+2} - U_{2n} = \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} < 0$, donc $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît.
  - $*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n+1} - U_{2n-1} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n+1} > 0$, donc $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croît.
  - $*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n+1} - U_{2n} = \dfrac{-1}{2n+1}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_{2n+1} - U_{2n} = 0$.

Ainsi, les suites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc admettent une limite commune ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_1,\ |U_{2n} - \ell| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_2,\ |U_{2n+1} - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall n \geqslant 2\max(N_1, N_2),\ |U_n - \ell| < \varepsilon$.

On en déduit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite, donc $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, donc aussi $\sum \frac{2\sqrt{3}(-1)^n}{\pi n}$.

Ainsi, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{T_n}}$ est la somme de deux séries convergentes, donc converge.