DM3 - Séries, intégrales impropres

Correction de l'exercice 1 – (Produit de Cauchy de deux séries)

1. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs convergentes. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

(a) Géométriquement, cela se comprend assez bien : la première somme consiste à sommer sur tous les indices (k,l) d'un carré de côté $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$, la deuxième à sommer sur un certain triangle, et la troisième, à sommer sur un carré de coté N, ces trois ensembles étant inclus les uns dans les autres.
Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=k}^{N} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{\ell=0}^{N-k} a_k b_\ell,$$

en ayant effectué le changement d'indice $\ell = n - k$.

- Comme les termes sont tous positifs, on a donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} c_n \leqslant \sum_{k=0}^{N} \sum_{\ell=0}^{N} a_k b_\ell = \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{k=0}^{N} b_k}.$$

- Les termes étant positifs, en retreignant la première somme à $N \leqslant \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$, on obtient une somme plus petite (il y a moins de termes) :

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \geqslant \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} \sum_{\ell=0}^{N-k} a_k b_\ell.$$

Mais puisque tous les indices k vérifient maintenant $k \leqslant \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{N}{2}$, l'indice maximal de la seconde somme est toujours supérieur à $\frac{N}{2}$, donc à $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$. Ainsi, la somme interne contient plus de termes (qui sont positifs) que la même somme restreinte à la borne supérieure $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$. On obtient ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} c_n \geqslant \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} a_k b_\ell = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} a_k \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} b_k}.$$

(b) Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ étant convergentes, et en notant A et B leur somme, le minorant de $\sum c_n$ trouvé dans la question précédente tend vers AB, et le majorant également, par composition des limites.
Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_n$ admet une limite lorsque N tend vers $+\infty$, et cette limite est AB. Ainsi, $\sum c_n$ converge, et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)}.$$

2. On suppose maintenant que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, mais plus nécessairement à termes positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c'_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}|.$$

(a) On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a'_n = |a_n|$, et $b'_n = |b_n|$. Alors $c'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a'_k b'_{n-k}$. De plus, la convergence absolue de $\sum a_n$ et $\sum v_n$ amène la convergence de $\sum a'_n$ et $\sum b'_n$. Ces séries étant à termes positifs, la question précédente amène la convergence de $\sum c'_n$.
Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n| \leqslant c'_n$, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |c_n|$ converge, *i.e.* $\boxed{\sum c_n \text{ converge absolument}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\Delta_n = \{(p,q) \in [\![0,n]\!]^2, \quad p+q > n\}$. On a alors $\Delta_n \subset [\![0,n]\!]^2$. Notons également

$$T_n = [\![0,n]\!]^2 \setminus \Delta_n = \{(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2 \mid k+\ell \leqslant n\} = \{(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2 \mid \ell \leqslant n-k\}$$

D'après l'expression trouvée un peu plus haut pour $\sum c_k$, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{(k,\ell)\in T_n} a_k b_\ell \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2} a_k b_\ell.$$

Puisque $T_n \subset [\![0,n]\!]^2$, en faisant la différence, il reste :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2\setminus T_n} a_k b_\ell = \sum_{(p,q)\in\Delta_n} a_p b_q.$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\boxed{\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n} c_k\right| = \left|\sum_{(p,q)\in\Delta_n} a_p b_q\right| \leqslant \sum_{(p,q)\in\Delta_n} |a_p b_q|}.$$

(c) En appliquant le même raisonnement que ci-dessus aux suites (a'_n), (b'_n) et (c'_n), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} a'_k \sum_{k=0}^{n} b'_k - \sum_{k=0}^{n} c'_k = \sum_{(p,q)\in\Delta_n} a'_p b'_q,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{k=0}^{n} |b_k| - \sum_{k=0}^{n} c'_k = \sum_{(p,q)\in\Delta_n} |a_p b_q|.$$

Ainsi, d'après la question précédente, il vient :

$$\boxed{\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n} c_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{k=0}^{n} |b_k| - \sum_{k=0}^{n} c'_k}.$$

(d) En appliquant le résultat de la première question aux séries à termes positifs $\sum a'_n$ et $\sum b'_n$, qui sont convergentes (car $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes), on obtient la convergente de $\sum c'_n$ et l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c'_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k|\right).$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{k=0}^{n} |b_k| - \sum_{k=0}^{n} c'_k = 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, appliqué à l'inégalité obtenue dans la question précédente, on obtient donc l'existence et la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n} c_k = 0.$$

Puisque $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, l'existence de cette limite assure la convergence de $\sum c_n$, et l'égalité :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{=\infty} b_k\right)}$$

(produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes)

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente (rappel : pour s'en assurer, on peut poser $u_n = \frac{|x|^n}{n!}$, remarquer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0, ce qui permet de comparer, par la méthode de d'Alembert, u_n avec une suite géométrique : il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$).
   Soit x, et y dans $\mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{x^n}{n!}$ et $b_n = \frac{y^n}{n!}$. Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. On est donc dans les conditions d'application de la formule du produit de Cauchy des séries. Calculons donc c_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!},\end{aligned}$$
   d'après la formule du binôme. Ainsi, la formule du produit de Cauchy donne :
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right)}.$$
   On retrouve la formule $\boxed{\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y}$. D'ailleurs, dans de nombreux ouvrages de mathématiques fondamentales, la fonction exponentielle est définie comme la somme de la série exponentielle, et on déduit ensuite de cela ses différentes propriétés, en particulier celle que nous venons de montrer à l'aide du produit de Cauchy.
4. Nous commençons par un rappel sur la convergence de ces séries. Soit $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \binom{n+p}{n} x^n$.
   On a alors
$$\| \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{n+1+p}|x| \to |x|.$$
   - si $|x| < 1$, alors soit a tel que $|x| < a < 1$. Par définition de la limite, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$\| \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant a \qquad \text{donc:} \qquad |u_{n+1}| \leqslant a|u_n|,$$
     et par itération
$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant |u_n| \leqslant a^{n-n_0}|u_{n_0}|,$$
     Ces termes étant positifs, et $\sum a^{n-n_0}$ étant convergente (série géométrique de raison $a \in]0,1[$), on en déduit la convergence de $\sum |u_n|$, donc la convergence absolue de $\sum u_n$.
   - (inutile pour ce qui suit, mais c'est un bon rappel) si $|x| > 1$, alors, toujours par définition de la limite, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}| > |u_n|$. Par conséquent, $(|u_n|)$ est positive et strictement croissante, donc ne peut pas converger vers 0. Donc (u_n) ne converge pas non plus vers 0. Ainsi, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   - (inutile aussi) si $|x| = 1$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| = \binom{n+p}{n} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{p!} \text{ (ou 1 si } p=0).$$
     Ainsi, $|u_n|$ ne tend pas vers 0 (tend vers $+\infty$ si $p > 0$ et 1 si $p = 1$). Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

   La convergence absolue étant établie pour tout $x \in]-1,1[$, nous allons pouvoir utiliser la formule du produit de Cauchy. Comme suggéré dans l'énoncé, nous effectuons une démonstration par récurrence.

   Soit, pour tout p dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(p)$: $\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^n = \frac{1}{(1+x)^{p+1}}$..

   Soit $p = 0$. Nous avons alors, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}},$$
   d'après la formule de la somme d'une série géométrique (obtenue par des moyens élémentaires, par passage à la limite dans la formule de sommation des termes d'une suite géométrique. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vrai. Soit $x \in]-1,1[$. D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(p)$ et d'après $\mathcal{P}(1)$ (somme des séries géométriques) :

$$\frac{1}{(1+x)^{p+2}} = \frac{1}{(1+x)^{p+1}} \cdot \frac{1}{1+x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right).$$

Les deux séries ci-dessus étant absolument convergentes, la formule du produit de Cauchy est appliquable. Calculons donc c_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{k} x^k x^{n-k} = x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{p}.$$

D'après la formule de sommation des coefficients binomiaux, il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = x^n \binom{n+p+1}{p+1}.$$

Nous avons donc bien obtenu :

$$\boxed{\frac{1}{(1+x)^{p+2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p+1}{p+1} x^n},$$

ce qui correspond à la propriété $\mathcal{P}(p+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout p dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ entraîne $\mathcal{P}(p+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout p dans $\mathbb{N}$.

On retrouve donc ainsi la formule du binôme négatif, c'est-à-dire la formule des dérivées d'une série géométrique.

Correction de l'exercice 2 –

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-ax} \operatorname{Arctan} x$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale $I(a)$ est impropre uniquement en $+\infty$. De plus :
   - si $a > 0$, puisque Arctan est minorée par $\frac{\pi}{2}$, et positive sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-ax}$. Or, l'intégrale exponentielle $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$ est convergente (puisque $a > 0$), donc, d'après le théorème de comparaison par inégalités d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $I(a)$ est convergente.
   - si $a \leqslant 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geqslant \operatorname{Arctan} x$, et comme Arctan admet une limite strictement positive en $+\infty$, $\frac{1}{x} = o(f(x))$ au voisinage de $+\infty$. La divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ et la positivité des fonctions amène alors la divergence de $I(a)$.

   Par conséquent, $\boxed{I(a) \text{ converge si et seulement si } a > 0.}$
2. Soit $a > 0$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$u(x) = \operatorname{Arctan} x \qquad \text{et} \qquad v(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}.$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)v(x) = 0$. Cette dernière hypothèse nous permet de faire une intégration par partie directement sur les intégrales impropres, et la convergence de l'intégrale initiale $I(a)$ nous assure alors la convergence de l'intégrale à laquelle on parvient :

$$I(a) = \Big[u(x)v(x)\Big]_0^{\lim_{+\infty}} + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

   On refait une deuxième intégration par parties, avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, définies, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad v(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}.$$

   Encore une fois, l'existence de la limite (nulle) de uv en $+\infty$ et la convergence de l'intégrale initiale nous assurent la convergence de l'intégrale à laquelle on parvient, et nous permettent d'écrire :

$$I(a) = \frac{1}{a} \Big[u(x)v(x)\Big]_0^{\lim_{+\infty}} - \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{2x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{I(a) = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^2}\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x.}$$

3. Inutile d'étudier les variations de la fonction. La fonction $g \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$ tend vers 0 en $+\infty$. Donc, par définition de la limite, avec $\varepsilon = 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x > A$, $|g(x)| \leqslant 1$. De plus, g est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, donc elle est bornée sur cet intervalle. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in [0, A]$, $|g(x)| \leqslant M$. En prenant $M' = \max(1, M)$, indépendant de x, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |g(x)| \leqslant M'.$$

Donc $\boxed{g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+.}$

Soit M' un majorant de g sur $\mathbb{R}_+$, on a alors (l'intégrale exponentielle étant conevergente, et par positivité de g) :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x \leqslant M' \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\right]_0^{\lim_{+\infty}} = \frac{1}{a}.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, puisque $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{1}{a} = 0$, on obtient l'existence d'une limite de l'intégrale lorsque a tend vers $+\infty$, et

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x = 0.}$$

4. Ainsi, au voisinage de $+\infty$ pour la variable a,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x = o(1) \qquad \text{donc:} \qquad \frac{2}{a^2}\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x = o\left(\frac{1}{a^2}\right).$$

On en déduit que $I(a) = \frac{1}{a^2} + o\left(\frac{1}{a^2}\right)$, et donc :

$$\boxed{I(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}}$$

Correction de l'exercice 3 – (Ecricome 2009)

1. **Domaine de définition de f**

   (a) La fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}_+$, cette intégrale n'admet qu'une impropreté en $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

   $$\int_0^A \mathrm{e}^{-at}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a}\right]_0^A = \frac{1}{a}(1 - \mathrm{e}^{-aA}).$$

   Cette expression admet une limite lorsque A tend vers $+\infty$, car $-aA$ tend vers $-\infty$ (puisque $a > 0$). Donc $\boxed{\text{l'intégrale converge}}$, et

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{a}}.$$

   (b) Soit x un réel fixé. Soit f_x la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad f_x(t) = \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}}$.
   La fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale admet une unique impropreté en $+\infty$. De plus,

   - $\boxed{\text{si } x = 0}$, $\int_0^{+\infty} f_x(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\ \mathrm{d}t$, et $\boxed{\text{cette intégrale converge}}$ d'après la question précédente.
   - $\boxed{\text{si } x \neq 0}$, alors $x^2 > 0$, donc $1 = o(x^2\mathrm{e}^{2t})$, donc

   $$1 + x^2\mathrm{e}^{2t} \underset{t\infty}{\sim} x^2\mathrm{e}^{2t} \qquad \text{donc:} \qquad \sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\infty}{\sim} |x|\mathrm{e}^{t} \qquad \text{donc:} \qquad f_x(t) \underset{t\infty}{\sim} |x|\mathrm{e}^{-t}.$$

   Or, d'après la question 1(a), l'intégrale $\int_0^{+\infty} |x|\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge, donc, par comparaison (les fonctions considérées étant positives), $\boxed{\int_0^{+\infty} f_x(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge.}}$

2. **Branche infinie de la courbe représentative de f**

(a) Soit $x > 0$ et $t \geqslant 0$. Toutes les quantités de l'encadrement à démontrer étant positives, cet encadrement équivaut à l'encadrement obtenu en élevant au carré :

$$\boxed{x^2\mathrm{e}^{2t} \leqslant 1 + x^2\mathrm{e}^{2t} \leqslant \left(x\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2\mathrm{e}^{2t} + 1 + \frac{e^{-2t}}{4x^2}}.$$

Cet encadrement est évidemment vérifié !

(b) L'encadrement de la question précédente amène :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad x\mathrm{e}^{-t} \leqslant f_x(t) \leqslant x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{2x},$$

d'où, en intégrant cette inégalité, par croissance de l'intégrale, et toutes les intégrales étant convergentes, d'après les questions 1(a) et 1(b),

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\ \mathrm{d}t.$$

En utilisant la question 1(a), il vient alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.}$

(c) Nous avons donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$0 \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{1}{6x},$$

donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$, donc la courbe de f admet en $+\infty$ une $\boxed{\text{droite asymptote d'équation } y = x}$, et se situe $\boxed{\text{au-dessus de cette asymptote}}$.

3. **Dérivabilité et monotonie de f**

(a) Soit x strictement positif. La fonction $\varphi : t \mapsto x\mathrm{e}^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et de classe $\mathcal{C}^1$, bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[x, +\infty[$. Ainsi, le changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$ est valide, et $\mathrm{d}u = x\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$. On obtient :

$$\boxed{f(x) = x^2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3\mathrm{e}^{3t}}\sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}}x\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = x^2\int_x^{+\infty} \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}\ \mathrm{d}u}.$$

(b)
- La fonction $u \mapsto \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}$ étant continue entre 1 et x, pour tout $x > 0$, elle est primitivable, et une primitive (celle s'annulant en 1) est donnée par :

$$g : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}\ \mathrm{d}u.$$

Cette primitive est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}\ \mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}\ \mathrm{d}u - g(x) = C - g(x),$$

où C est une constante, et g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- Ainsi, f est le produit de la fonction « carré » et de la fonction h, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[}$.

Avec les notations précédentes, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x\int_x^{+\infty} \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}\ \mathrm{d}u - x^2g'(x) = \frac{2}{x}f(x) - \frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x^3} = \boxed{\frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}}.$$

(c) On effectue une intégration par parties sur l'intégrale

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}u^3}{\mathrm{d}u},$$

en posant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$, définies pour tout $u \in [x,+\infty[$ par :

$$\alpha(u)=\sqrt{1+u^2},\qquad \alpha'(u)=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\qquad \beta(u)=-\frac{1}{2u^2},\qquad \beta'(u)=\frac{1}{u^3}.$$

On a : $\forall u \in [x,+\infty[,\quad \alpha(t)\beta(t)=-\dfrac{\sqrt{1+u^2}}{2u^2} \underset{u\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2u}$.
Ainsi, $\alpha\beta$ admet une limite, égale à 0, en $+\infty$. L'existence de cette limite nous autorise à faire l'intégration par parties directement sur -l'intégrale impropre, et on obtient :

$$I(x)=\Big[-\frac{\sqrt{1+u^2}}{2u^2}-\Big]_x^{\lim_{+\infty}}+\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

On obtient donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \boxed{2f(x)=2x^2I(x)=\sqrt{1+x^2}+x^2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.}$
En reprenant la relation de la question 3(b), on obtient alors, pour tout $x>0$:

$$\boxed{f'(x)=x\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}}.$$

Puisque l'intégrande est strictement positive continue sur $[x,+\infty[$, l'intégrale est strictement positive, donc

$$\forall x>0,\quad f'(x)>0.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$
Cela dit, c'est bien compliqué pour en arriver là, car il suffisait de constater que si $x<y$, alors pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $f_x(t)<f_y(t)$, et la stricte positivité de l'intégrale permet de conclure...

4. **Étude locale de f et f' en 0**

   (a) On refait une intégration par partie, en posant α et β les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$ définies de la façon suivante : pour tout $t\geqslant x$,

$$\alpha(u)=(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\qquad \alpha'(u)=-u(1+u^2)^{-\frac{3}{2}},\qquad \beta(u)=\ln u,\qquad \beta'(u)=\frac{1}{u}.$$

Nous avons :

$$\forall u\in[x,+\infty[,\quad \alpha(u)\beta(u)=(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\ln u \underset{u\infty}{\sim}\frac{\ln u}{u},$$

donc, d'après les croissances comparées, $\alpha\beta$ admet une limite nulle en $+\infty$. On peut donc encore une fois effectuer l'intégration par parties directement sur l'intégrale impropre, et

$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}=\Big[(1+u^2)^{-frac12}\ln u\Big]_x^{\lim_{+\infty}}+\int_x^{+\infty}\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\int_x^{+\infty}\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.$$

Remarquez que le théorème d'intégration par partie nous assure de la convergence en la borne $+\infty$ de l'intégrale obtenue. Ainsi, la fonction intégrée étant continue ailleurs, il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ en la borne 0. Or, puisque $u\ln u\to 0$ en 0, la fonction $u\mapsto \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ peut se prolonger par continuité en 0 (en la définissant égale à 0 en 0). Ainsi, étant faussement impropre en la borne 0, et convergente en la borne $+\infty$, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u \text{ est convergente.}}$

   (b) Lorsque $x\to 0^+$, $-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$ tend vers $-\infty$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$. tend vers une limite finie, donc est négligeable devant $-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi, l'égalité de la question précédente amène :

$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}\underset{x\to0^+}{\sim}-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\underset{x\to0^+}{\sim}-\ln x.$$

En revenant à l'expression de f' trouvée en 3(c), on en déduit que

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x)}.$$

De même, on a :

$$x^2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} \underset{x\to 0^+}{\sim} -x^2\ln x, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+x^2}-1 \underset{0^+}{\sim} \frac{x^2}{2} = o(-x^2\ln x),$$

donc, d'après l'expression trouvée en 3(c),

$$2f(x)-1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -x^2\ln x \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{f(x)-\frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}}.$$

(c) L'équivalent de f' nous assure, d'après les croissances comparées, que f' tend vers 0 en 0. Donc, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la restriction $f_{|]0,+\infty[}$ se prolonge par continuité en une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et vérifiant $g'(0)=0$. Il suffit de montrer que ce prolongement par continuité coïncide avec f, donc que f est continue en 0.
Cela provient du deuxième équivalent, qui assure que f tend vers $\frac{1}{2}$ en 0, ce qui correspond au calcul direct de $f(0)$ (question 1(a) avec $a=2$).
Ainsi, $f_{|[0,+\infty[}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc f est dérivable à droite en 0 avec

$$f'_d(0) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

Par parité, on a aussi la dérivabilité à gauche, et les égalités :

$$f'_g(0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Ainsi, puisque $f'_d(0) = f'_g(0) = 0$, f est dérivable en 0, et les limites ci-dessus amènent :

$$\boxed{f'(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f'(x)}.$$

Ainsi, f est dérivable en 0, et f' est continue en 0.
Comme on avait déjà le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[}$, et même sur $\mathbb{R}$, par parité.