DM n° 4 : Intégrales impropres

Correction de l'exercice 1 – Comparaison par équivalences : un contre-exemple

1. Puisque sin est borné, et $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{\ln t} = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \frac{\sin t}{\ln t} = o(1).$$

On en déduit que :

$$1 + \frac{\sin t}{\ln t} \underset{+\infty}{\sim} 1 \qquad \text{puis:} \qquad \boxed{\frac{\sin t}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin t}{t}\left(1 + \frac{\sin t}{\ln t}\right)}.$$

2. Un classique parmi les classiques ! On procède par intégration par partie (méthode à utiliser, ou au moins à essayer, en $+\infty$ dès que vous avez un sin)
La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$, donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.
On pose u et v les deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi, +\infty[$, définies par :

$$\forall t \in [\pi, +\infty[\qquad \begin{array}{ll} u(t) = -\cos t & v(t) = \dfrac{1}{t} \\ u'(t) = \sin t & v'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \end{array}$$

On a :

$$\forall t \in [\pi, +\infty[, \quad u(t)v(t) = -\frac{\cos t}{t} \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\pi^{\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ont même nature.
Or, pour tout $t \in [\pi, +\infty[$,

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Puisque $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$ en $+\infty$), d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument (donc converge). D'après ce qui précède, on en déduit la $\boxed{\text{convergence de } \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t}$

À savoir faire les yeux fermés...

3. (a) Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ sont décroissantes et positives sur $[\pi, +\infty[$. Leur produit $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t}$ est donc aussi décroissant (attention à ne pas oublier la positivité, nécessaire pour l'étude des variations d'un produit).

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t}$ est décroissante sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, on a :

$$\forall t \in [n\pi, (n+1)\pi], \quad \frac{1}{(n+1)\pi \ln((n+1)\pi)} \leqslant \frac{1}{t \ln t}.$$

Puisque $\sin^2 t \geqslant 0$, on en déduit que :

$$\forall t \in [n\pi, (n+1)\pi], \quad \frac{\sin^2 t}{(n+1)\pi \ln((n+1)\pi)} \leqslant \frac{\sin^2 t}{t \ln t},$$

puis, par positivité de l'intégrale (non impropre ici) :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{(n+1)\pi \ln((n+1)\pi)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t \ln t}\,\mathrm{d}t.$$

Or,
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \frac{\pi}{2}.$$
Ainsi, l'inégalité précédente amène :

$$\boxed{\frac{1}{2(n+1)\ln((n+1)\pi)} \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t \ln t} \, \mathrm{d}t}$$

(c) On a :

$$\ln((n+1)\pi) = \ln(n+1) + \ln(\pi) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln \pi \underset{+\infty}{\sim} \ln n,$$

car $\ln \pi = o(\ln n)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = o(\ln n)$, puisque $\ln n$ tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\frac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}.$$

Les deux termes étant positifs pour tout $n \geqslant 2$, les séries $\sum \dfrac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)}$ et $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ sont donc de même nature, d'après le théorème de comparaison par équivalences des séries à termes positifs. On reconnaît là une série de Bertrand (HP) dans le cas « critique ». On se souvient alors que la méthode dans ce cas est de faire une comparaison avec une intégrale : la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ étant décroissante sur $[2,+\infty[$, positive, de limite nulle, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln n}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ sont de même nature.

Or, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est $F : t \mapsto \ln(\ln t)$. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ diverge, donc la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$ diverge, donc la série de terme général $\dfrac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)}$ diverge. Puisqu'elle est à termes positifs,

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)} = +\infty.$$

Or, en sommant l'inégalité de la question précédente entre $n=1$ et $n=N$, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\forall N \geqslant 1, \quad \int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t\ln t} \, \mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)}.$$

D'après le théorème de minoration, on en déduit donc que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t\ln t} \, \mathrm{d}t = +\infty,$$

donc, d'après le critère séquentiel pour les limites, $x \mapsto \displaystyle\int_{\pi}^{x} \frac{\sin^2 t}{t\ln t} \, \mathrm{d}t$ n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t\ln t} \, \mathrm{d}t \text{ diverge.}}$

On a, pour tout $t \in [\pi, +\infty[$,

$$\frac{\sin t}{t}\left(1 + \frac{\sin t}{\ln t}\right) = \frac{\sin t}{t} + \frac{\sin^2 t}{t\ln t}.$$

Or, $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t\ln t} \, \mathrm{d}t$ diverge, donc $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} + \frac{\sin^2 t}{t\ln t}\right) \mathrm{d}t$ diverge, c'est-à-dire $\boxed{\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\left(1+\frac{\sin t}{\ln t}\right) \mathrm{d}t \text{ diverge.}}$

4. $\boxed{\text{La positivité des fonctions est indispensable pour comparer la nature d'intégrales par équivalents}}$

En effet on a montré que $\dfrac{\sin t}{t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sin t}{t}\left(1+\dfrac{\sin t}{\ln t}\right)$, et pourtant, d'après les calculs qui précèdent, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge alors que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\left(1+\frac{\sin t}{\ln t}\right)\, \mathrm{d}t$ diverge.

Correction de l'exercice 2 – Limite sous le signe somme : un contre-exemple

Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $x \mapsto 1+n^2x^2$ est continue et ne s'annule pas, et puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x$ n'est impropre qu'en la borne $+\infty$.

De plus, f étant bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leqslant M.$$

On a alors

$$\forall x \geqslant 1, \quad \left|\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\right| \leqslant \frac{nM}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{nM}{n^2x^2} = \frac{M}{nx^2}.$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{M}{nx^2}\, \mathrm{d}x$ est convergente (intégrale de Riemann de paramètre $2>1$, en une borne infinie). Ainsi, d'après le théorème de comparaison des intégrales par inégalités, appliqué à des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x$ est absolument convergente, donc convergente.

Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x \text{ est convergente}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variables $x = \frac{t}{n}$, *i.e.* $t = nx$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, strictement croissant et bijectif de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ (car $n>0$), et vérifiant $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{n}$. Ainsi, le changement de variable est valide. La convergence de l'intégrale initiale étant déjà aquise, le théorème de changement de variable assure la convergence de la seconde, et on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{nf\left(\frac{t}{n}\right)}{1+n^2\left(\frac{t}{n}\right)^2} \frac{\mathrm{d}t}{n} \qquad \text{soit:} \quad \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t}.$$

3. Cette question n'est pas évidente, car on n'est pas autorisé à passer la limite à l'intérieur de l'intégrale. L'idée est de comparer cette intégrale à celle qu'on obtiendrait formellement en passant la limite à l'intérieur, c'est-à-dire, à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$. Effectuons donc la différence des 2, en vue d'une majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\left|f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)\right|}{1+t^2}\, \mathrm{d}t,$$

d'après l'inégalité triangulaire, ces intégrales étant toutes convergentes, par un arguement de comparaison similaire à celui de la première question, le numérateur étant borné (par $2M$).

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue, il existe δ tel que pour tout $x \in [0,\delta[$, $|f(x)-f(\delta)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$ (le facteur π a été rajouté une fois arrivé en fin d'argument, afin de rectifier le coefficient trouvé en fin de majoration). Ainsi, étant donné $n>0$, pour tout $t \in [0,n\delta[$, $|f\left(\frac{t}{n}\right) - f(\delta)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{n\delta} \frac{\varepsilon}{\pi(1+t^2)} + \int_{n\delta}^{+\infty} \frac{\left|f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)\right|}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Puisque, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|f\left(\frac{t}{n}\right) - f(0)\right| \leqslant |f\left(\frac{t}{n}\right)| + |f(0)| \leqslant M + M = 2M,$$

on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{n\delta} \frac{\varepsilon}{\pi(1+t^2)} + \int_{n\delta}^{+\infty} \frac{2M}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2M}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{n\delta}^{+\infty} \frac{2M}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$, d'après les propriétés du reste d'une intégrale convergente. Ainsi, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \int_{n\delta}^{+\infty} \frac{2M}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\int_0^{n\delta} \frac{\varepsilon}{\pi(1+t^2)} < \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\pi(1+t^2)} = \frac{\varepsilon}{\pi}\Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{\lim +\infty} = \frac{\varepsilon}{2}$$

(c'est pour obtenir cette valeur qu'on a rajouté le facteur π dans l'utilisation de la continuité de f un peu plus haut)
Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, par définition de la limite, $\left(\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = f(0)\Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{\lim +\infty},$$

d'où finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot f(0).}$$

Avec des hypothèses supplémentaires sur f (caractère $\mathcal{C}^1$ et existence d'une limite finie en $+\infty$), on aurait pu s'en sortir plus facilement à l'aide d'une intégration par parties, en dérivant $t \mapsto f\left(\frac{t}{n}\right)$ et en primitivant $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ (je vous laisse mettre l'argument en place, c'est un bon entraînement)

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (fixé).
   - Si $f(x) = 0$, on a directement , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{nf(x)}{1+n^2x^2} = 0$, donc $g(x) = 0$.
   - Si $f(x) \neq 0$,

     $$\frac{nf(x)}{1+n^2x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{nf(x)}{n^2x^2} = \frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{n},$$

     donc

     $$\lim_{n\to+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} = 0 \qquad \text{donc:} \qquad g(x) = 0.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = 0.}$
5. $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x) \text{ converge et vaut } 0}$ (intégrale de la fonction nulle !)
6. Pour tout fonction f bornée et continue sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant de plus que $f(0) \neq 0$, on obtient :

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

   L'égalité n'est vérifiée que si $f(0) = 0$. Ainsi, attention à l'erreur classique (beaucoup trop fréquente) consistant à passer une limite à l'intérieur de l'intégrale. VOUS N'AVEZ PAS LE DROIT DE LE FAIRE !

Correction de l'exercice 3 – (Intégrale de Gauss)

1. Soit $t \in [0,1]$. La fonction f_t est de classe $\mathcal{C}^\infty$, en tant que composée d'une fonction polynômiale en x et de l'exponentielle, toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{f_t'(x) = -2x(t^2+1)\mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f_t''(x) = (4x^2(t^2+1)^2 - 2(t^2+1))\mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)}}.$$

Puisque $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a $1 \leqslant t^2+1 \leqslant 2$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f_t''(x)| = |4x^2(t^2+1)^2 + 2(t^2+1)|\mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)} \leqslant (|4x^2(t^2+1)^2 + |2(t^2+1)|)\mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)} \leqslant (4x^2 \cdot 2^2 + 4)\mathrm{e}^{-x^2},$$

et donc finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \boxed{|f_t''(x)| \leqslant 4(4x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}}.$$

Soit $\alpha : x \mapsto 4(4x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}$, définie sur $\mathbb{R}_+$. La fonction α est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, en tant que produit et composée de fonctions qui le sont. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha'(x) = (-8x(4x^2+1) + 32x)\mathrm{e}^{-x^2} = x(-32x^2+24)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$\alpha'(x)$		$+$	0	$-$	
$\alpha(x)$	0	$\nearrow$	$16\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$	$\searrow$	0

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\alpha(x) \leqslant 16\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$, et on en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \boxed{|f_t''(x)| \leqslant 16\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, et $u \in \mathbb{R}^*$ tel que $u + x \in \mathbb{R}_+$. La fonction f_t étant de classe $\mathcal{C}^2$ entre u et $u+x$, et sa dérivée seconde étant majorée sur cet intervalle (inclus dans $\mathbb{R}_+$) par $16\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$, il résulte de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à f_t entre x et $x+u$ que :

$$|f_t(x+u) - f_t(x) - uf_t'(x)| \leqslant \frac{|u|^2}{2} \cdot 16\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}},$$

soit, en divisant par $|u|(1+t^2) > 0$:

$$\left|\frac{f_t(x+u) - f_t(x)}{u(1+t^2)} - \frac{f_t'(x)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{8|u|\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}}{1+t^2}.$$

Ainsi, les deux membres de l'inégalité étant continus sur $[0,1]$ par rapport à t (à x fixé), on peut intégrer entre 0 et 1, et, d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales définies, on trouve alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(x+u)-g(x)}{u} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} f_t'(x)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1 \left(\frac{f_t(x+u) - f_t(x)}{u(1+t^2)} - \frac{f_t'(x)}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^1 \left|\frac{f_t(x+u) - f_t(x)}{u(1+t^2)} - \frac{f_t'(x)}{1+t^2}\right|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant 8|u|\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 8|u|\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}\,\mathrm{Arctan}\,1 = 2\pi|u|\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{u\to 0} 2\pi|u|\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}} = 0$, donc, d'après le théorème d'encadrement, $\left|\frac{g(x+u)-g(x)}{u} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} f_t'(x)\,\mathrm{d}t\right|$ admet une limite lorsque u tend vers 0 et

$$\boxed{\lim_{u\to 0}\left|\frac{g(x+u)-g(x)}{u} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} f_t'(x)\,\mathrm{d}t\right| = 0}$$

(cette limite se réduit à une limite à droite lorsque $x = 0$, à cause de la condition $x + u \geqslant$ imposée à u).

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $umapsto \dfrac{g(x+u) - g(x)}{u}$ admet une limite lorsque u tend vers 0 (limite à droite si $x = 0$), donc que g est dérivable en x (et si $x = 0$, la dérivabilité à droite équivaut à la dérivabilité en 0, puisque 0 est le bord gauche du domaine de définition de g). Ainsi, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{g'(x) = \int_0^1 \frac{f_t'(x)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t}$$

3. (a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, la fonction $k : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est une primitive de e^{-t^2} sur $\mathbb{R}_+$ (plus précisément la primitive s'annulant en 0). Par conséquent, k est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad k'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Ainsi, la fonction h, obtenu comme le carré de k, est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) = 2k'(x)k(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En effectuant le changement affine (donc de classe $\mathcal{C}^1$) $t = ux$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{-u^2x^2} x\,\mathrm{d}u = 2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u = -g'(x),$$

puisque la variable d'intégration est une variable muette. L'égalité est aussi clairement vérifiée pour $x = 0$ (en repartant de l'expression initiale de h'), donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) + g'(x) = 0}$$

(b) Par conséquent, la fonction $h + g$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) + g(x) = h(0) + g(0) = 0 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}}$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $t \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2},$$

donc

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0$, on obtient, d'après le théorème d'encadrement, l'existence de la limite de g en $+\infty$, et

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0}.$$

De la relation précédente, on a alors l'existence de la limite de h en $+\infty$, et :

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \frac{\pi}{4} - \lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Or, par positivité des intégrales considérées, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{h(x)},$$

donc, par continuité de la racine en 0, en passant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient l'existence de la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, donc la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (que l'on peut bien sûr obtenir par des techniques beaucoup plus élémentaires), et la valeur de cette limite :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} h(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Correction de l'exercice 4 – Pour tout réels x et y, on pose

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t.$$

1. (a) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, la fonction $t\mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$. Donc il peut y avoir deux impropretés en 0 et en 1.
   - Étude en 0. On a, au voisinage de 0 :

   $$t^{x-1}(1-t)^{y-1}\underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}.$$

   Les fonctions étant positives, l'intégrale définissant $B(x,y)$ et $\int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ sont de même nature en la borne 0. Or cette dernière intégrale est convergente si et seulement si $1-x<1$, donc si $x>0$, en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $1-x$ en 0. Ainsi, l'intégrale définissant $B(x,y)$ converge en la borne 0 si et seulement si $x>0$.
   - Étude en 1. De même :

   $$t^{x-1}(1-t)^{y-1}\underset{t\to 1^-}{\sim}(1-t)^{y-1},$$

   et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t$ converge (pour sa seule borne impropre 1) si et seulement si $y>0$ (il s'agit encore une fois d'une intégrale de Riemann, en 1 cette fois). Donc l'intégrale définissant $B(x,y)$ converge en la borne 1 si et seulement si $y>0$.

   Ainsi, $\boxed{\text{le domaine de définition de } B \text{ est } (\mathbb{R}_+^*)^2.}$

   (b) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*)^2$. Effectuons le changement de variables $u=1-t$ dans $B(x,y)$, donc $t=1-u=\varphi(u)$, donc $\mathrm{d}t=-\ \mathrm{d}u$. La fonction φ est bijective de $]0,1[$ dans $]0,1[$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante. Ainsi, d'après le théorème de changement de variables, les intégrales

   $$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}tet-\int_0^1(1-u)^{x-1}(1-1+u)^{y-1}(-\ \mathrm{d}u)$$

   sont de même nature, donc convergentes, et :

   $$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t=-\int_0^1(1-u)^{x-1}(1-1+u)^{y-1}(-\ \mathrm{d}u)=\int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\ \mathrm{d}u.$$

   Ainsi, on obtient bien : $\boxed{B(x,y)=B(y,x)}$.

   (c) Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. On a :

   $$B(x+1,y)=\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t.$$

   Effectuons une intégration par parties sur cette intégrale, en posant les fonctions u et v définies par :

   $$\forall t\in]0,1[,\quad u(t)=t^x\qquad\text{et}\qquad v(t)=-\frac{(1-t)^y}{y}.$$

   Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, et

   $$\forall t\in]0,1[,\quad u'(t)=xt^{x-1}\qquad\text{et}\qquad v'(t)=(1-t)^y.$$

   De plus, puisque $x>0$ et $y>0$, on a :

   $$\lim_{t\to 0^+}u(t)v(t)=0\qquad\text{et}\qquad \lim_{t\to 1^-}u(t)v(t)=0.$$

   Ainsi, ces limites existant dans $\mathbb{R}$, le théorème d'intégration par parties permet d'affirmer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 u'v$ et $\displaystyle\int_0^1 uv'$ sont de même nature, donc convergentes, et que

   $$\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t=\lim_{t\to 1^-}u(t)v(t)-\lim_{t\to 0^+}u(t)v(t)-\int_0^1 -xt^{x-1}\cdot\frac{(1-t)^y}{y}\ \mathrm{d}t=\frac{x}{y}B(x,y+1).$$

   Donc $\boxed{yB(x+1,y)=xB(x,y+1)}$.

Or, on a :

$$B(x,y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^{x}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t,$$

ces intégrales étant convergentes. Ainsi :

$$B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y).$$

On obtient donc la relation suivante :

$$yB(x+1,y) = xB(x,y) - xB(x+1,y) \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).}$$

(d) On commence par $n=0$. On obtient :

$$B(1,y) = \int_0^1 t^0(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{(1-t)^y}{y}\Big]_0^1 = \frac{1}{y}.$$

Alors, par itération de la formule trouvée dans la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B(n+1,y) = \frac{n}{n+y}\cdot\frac{n-1}{n-1-y}\cdots\frac{1}{1+y}B(1,y) = \frac{n!}{y\prod\limits_{k=1}^{n}(k+y)}$$

et, en voyant le terme y comme le terme correspondant à $k=0$ dans le produit, il vient finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad B(n+1,y) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(k+y)}}.$$

Ce produit ne se simplifie pas davantage.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) La dérivée seconde de $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est $f'' : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$. Donc f'' est positive sur $\mathbb{R}$, donc f est convexe. Ainsi, la courbe de f est au-dessous de ses tangentes, notamment de sa tangente en 0. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\mathrm{e}^{-t} \geqslant f'(0)t + f(0) = -t+1}.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0,n]$, $\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}$. Or puisque $t \in [0,n]$, ces quantités sont positives, donc en élevant à la puissance n, par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\boxed{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.}$$

(b) • **Première méthode : En distinguant suivant que** $t \in [0,\sqrt{n}[$ **et** $t \in [\sqrt{n},n]$

∗ Si $t \in [\sqrt{n},n]$, l'inégalité est évidente, car $\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant 0$.

∗ Si $t \in [0,\sqrt{n}[$, les deux quantités à comparer sont strictement positives, donc, par croissance du ln sur $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de montrer l'inégalité obtenue en appliquant le logarithme, à savoir :

$$\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) - t \leqslant n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right).$$

On pose g la fonction définie sur $[0,\sqrt{n}[$ par :

$$g(t) = \ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) - t - \ln\left(1-\frac{t}{n}\right).$$

Cette fonction est dérivable sur $[0,\sqrt{n}[$, et

$$\forall t \in [0,\sqrt{n}[, \quad g'(t) = \frac{-\frac{2}{n}t}{1-\frac{t^2}{n}} - 1 + \frac{1}{1-\frac{t}{n}}.$$

Après mise sur le même dénominateur, et après simplifications, on obtient :

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[, \quad g'(t) = \frac{-\frac{t}{n} + \frac{2t^2}{n^2} - \frac{t^3}{n^2}}{\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\left(1 - \frac{t}{n}\right)} = \frac{-t(t^2 - 2t + n)}{(n - t^2)(n - t)}.$$

Or, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$,

$$t^2 - 2t + n = (t-1)^2 + (n-1) \geqslant 0,$$

puisque $n \geqslant 1$. Ainsi, puisque par ailleurs $t \leqslant \sqrt{n}$ (donc le dénominateur est positif), on obtient, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$, $g'(t) \leqslant 0$.
Ainsi, la fonction g est décroissante sur $[0, \sqrt{n}[$, donc

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[, \quad g(t) \leqslant g(0) = 0.$$

On obtient bien : $\forall t \in [0, \sqrt{n}[, \quad \ln\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right) - t \leqslant n \ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)$. On trouve l'inégalité recherchée en appliquant l'exponentielle, qui est croissante.

Ainsi, pour tout $t \in [0, n]$, on a : $\boxed{\left(1 - n\left(\dfrac{t}{n}\right)^2\right) \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n}$.

- **Deuxième méthode : par la convexité de $x \mapsto (1-x)^n$.**
Tout d'abord, pour tout $x \in [0,1]$, on a $(1-x)^n \geqslant 1 - nx$. Encore une fois, il s'agit d'une inégalité de convexité. En posant $h : x \mapsto (1-x)^n$, on obtient, si $n \geqslant 2$, pour tout $x \in [0,1]$, $h'(x) = -n(1-x)^{n-1}$ et $h''(x) = n(n-1)(1-x)^{n-2} \geqslant 0$. Si $n = 1$, $h'' = 0 \geqslant 0$. Ainsi, dans tous les cas, h est convexe, donc au-dessus de sa tangente en 0. Ainsi :

$$\forall x \in [0,1], \quad (1-x)^n \geqslant f'(0)x + f(0) = -nx + 1.$$

(cela peut être vu aussi comme une utilisation de l'inégalité de Taylo-Lagrange)
Par ailleurs, un argument similaire à ci-dessus permet de montrer que pour tout $t \geqslant 0$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^t.$$

(en fait, l'argument donné en 2(a) est aussi valable pour toutes les valeurs négatives de t)
On en déduit que pour tout $t \in [0, n]$, puisque $\frac{t}{n} \in [0,1]$:

$$\left(1 - n\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \left(\frac{t}{n}\right)^2\right)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-t},$$

et donc enfin

$$\boxed{\left(1 - n\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}$$

(c) Soit $x > 0$; On en déduit que pour tout $t \in [0, n]$,

$$\left(1 - n\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

donc, puisque $t^{x-1} \geqslant 0$,

$$\left(1 - n\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}.$$

donc :

$$\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-t}t^{x+1} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et n, on obtient, par positivité de l'intégrale (les intégrales étant convergentes en 0 d'après les propriétés de convergence des intégrales Γ)

$$\boxed{\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^n e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t=\Gamma(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^n e^{-t}t^{x+1}\ \mathrm{d}t=\Gamma(x+2)$.
Ainsi, d'après les règles usuelles sur les limites, le majorant et le minorant convergent tous deux vers $\Gamma(x)$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, le terme intermédiaire admet une limite, et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t=\Gamma(x).}$$

(d) Effectuons le changement de variables $u=\frac{t}{n}$, donc $t=nu=\varphi(u)$. La fonction φ est une bijection de $[0,1]$ dans $[0,n]$, strictement croissante, et de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, les intégrales étant convergentes, on a :

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t=\int_0^1(1-u)^n(nu)^{x-1}n\ \mathrm{d}u=n^x\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\ \mathrm{d}u=\boxed{n^xB(n+1,x)}.$$

On déduit alors de la question 1(d) que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}n^x\cdot\dfrac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(k+x)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ dt=\Gamma(x)}$.

3. (a) D'après ce qui précède,

$$\lim_{n\to+\infty}n^yB(n+1,y)=\Gamma(y)\neq 0,\qquad\text{donc:}\qquad n^yB(n+1,y)\underset{+\infty}{\sim}\Gamma(y),\qquad\text{donc:}\qquad\boxed{B(n+1,y)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\Gamma(y)}{n^y}}.$$

(b) Comme $t\in[0,1]$, la fonction $x\mapsto t^x$ est décroissante. Donc, à y fixé, par propriété de croissance de l'intégrale, la fonction B est décroissante en sa première variable. Ainsi, pour tout $x>1$,

$$B(\lfloor x\rfloor+1,y)\leqslant B(x,y)\leqslant B(\lfloor x\rfloor,y)$$

où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x. Or, $x\underset{+\infty}{\sim}\lfloor x\rfloor$ et $x\underset{+\infty}{\sim}\lfloor x\rfloor+1$, donc y étant fixe,

$$\lfloor x\rfloor^y\underset{x\to+\infty}{\sim}x^y\underset{x\to+\infty}{\sim}(\lfloor x\rfloor+1)^y.$$

Ainsi,

$$B(\lfloor x\rfloor,y)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\Gamma(y)}{x^y}\underset{x\to+\infty}{\sim}B(\lfloor x\rfloor+1,y).$$

Or, l'encadrement précédent amène, pour tout $x>1$,

$$\frac{B(\lfloor x\rfloor+1,y)}{\Gamma(y)/x^y}\leqslant\frac{B(x,y)}{\Gamma(y)/x^y}\leqslant\frac{B(\lfloor x\rfloor,y)}{\Gamma(y)/x^y}.$$

D'après ce qui précède, les termes encadrant admettent 1 pour limite, donc aussi le terme central. Donc

$$\boxed{B(x,y)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\Gamma(y)}{x^y}}.$$

(c) Par itération de la question 1(c), on obtient dans un premier temps que

$$B(x+n,y)=\frac{x+n-1}{x+y+n-1}B(x+n-1,y)=\cdots=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+y+k)}B(x,y)$$

Ainsi, d'après la question 2,

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^{x+y}n!}{n^xn!}\cdot\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+y+k)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{n^yB(x+n,y)}{B(x,y)}\cdot\frac{x+n}{x+y+n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{n^yB(x+n,y)}{B(x,y)}.$$

Or, $B(x+n,y)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\Gamma(y)}{n^y}$, donc, en remplaçant dans l'équivalent précédent : $\dfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\Gamma(y)}{B(x,y)}$.
Comme ces expressions ne dépendent plus de n (sur lequel porte l'équivalent), cet équivalent est en fait une égalité (égalité des limites) On en déduit donc :

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}=\frac{\Gamma(y)}{B(x,y)}\qquad\text{soit:}\qquad\boxed{B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}.$$