DM n° 5 : Révisions de probabilités

Correction du problème – (extrait d'ESSEC 2000) – Étude d'un combat à trois.

1. **Calcul de probabilités**

   (a) Il s'agit de restituer une formule du cours, cas très particulier de la formule du crible de Poincaré :

   $$\boxed{P(U \cup V) = P(U) + P(V) - P(U \cap V)}.$$

   On ne vous demande pas la démonstration. La question est uniquement là pour vous mettre sur la bonne voie pour la question suivante.

   (b) Notons U (*resp.* V, *resp.* W) l'événement : A (*resp.* B, *resp.* C) réussit son tir. Alors l'événement considéré est l'événement $\overline{U} \cap (V \cup W)$. Les trois tirs étant indépendants,

   $$P(V \cup W) = P(V) + P(W) - P(V \cap W) = P(V) + P(W) - P(V)P(W) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

   $$\text{d'où :} \qquad P(\overline{U} \cap (V \cup W)) = P(\overline{U})P(V \cap W) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}.$$

   (c) Il s'agit cette fois de l'événement $U \cap (V \cup W)$. De même qu'avant, les tirs de chaque joueur étant mutuellement indépendants :

   $$P(U \cap (V \cup V)) = P(U)P(V \cap W) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{9}}.$$

2. **Détermination de probabilités conditionnelles**

   (a) AB_0 est l'événement impossible. De plus, tant que A et B ne sont pas éliminés, personne ne vise C, puisque A vise B (son plus dangereux adversaire) et B vise A. Donc, tant que A et B ne sont pas éliminés, C ne peut pas être éliminé. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $\boxed{AB_n \text{ est impossible}}$.

   Dans la suite, on ne considérera donc que les événements ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n, C_n, $\varnothing_n$.

   (b) Si ABC_n est vérifié, alors les trois joueurs s'affrontent lors de la $n+1$-ième manche, et pour que ABC_{n+1} ait lieu, ils doivent tous les trois rater leur cible. Avec les notations précédentes (U, V et W étant ici des événements associés à la $n+1$-ième manche), et les événements U, V et W étant mutuellement indépendants (donc leurs événements contraires aussi) :

   $$P(ABC_{n+1} \mid ABC_n) = P(\overline{U} \cap \overline{V} \cap \overline{W}) = P(\overline{U})P(\overline{V})P(\overline{W}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}.$$

   (c) De même, pour que BC_{n+1} soit réalisé si ABC_n l'est, il faut et il suffit que soit B soit C réussisse son tir (ils visent tous deux A), et que A rate son tir. Ainsi :

   $$P(BC_{n+1} \mid ABC_n) = P(\overline{U} \cap (V \cup W)) = \boxed{\frac{2}{9}} \qquad \text{d'après 1b.}$$

   De même, pour que AC_{n+1} soit réalisé si ABC_n l'est, A ne doit pas être éliminé, donc A et C ratent leurs tirs, et B doit être éliminé, donc A réussit son tir. Ainsi :

   $$P(AC_{n+1} \mid ABC_n) = P(U \cap \overline{V} \cap \overline{W}) = P(U)P(\overline{V})P(\overline{W}) = \boxed{\frac{2}{9}},$$

   (on a encore utilisé l'indépendance de U, V et W ; on ne le reprécisera plus dans les raisonnements similaires suivants).

(d) Pour que A_{n+1} ne peut pas être réalisé si ABC_n l'est, car au n-ième tournoi dans lequel les trois joueurs s'affronte, personne ne vise C, qui ne peut donc pas être éliminé. De même, B_{n+1} ne peut être réalisé si ABC_n l'est. Ainsi :

$$\boxed{P(A_{n+1} \mid ABC_n) = P(B_{n+1} \mid ABC_n) = 0}.$$

Enfin, si ABC_n est réalisé, C_{n+1} est réalisé si et seulement si A est éliminé (soit par B soit par C) et B est éliminé (par A), donc si et seulement si A réussit son tir, et B ou C réussit son tir. Ainsi :

$$\boxed{P(C_{n+1} \mid ABC_n) = P(U \cap (V \cup W)) = \frac{4}{9}} \qquad \text{d'après 1c.}$$

(e) Si AC_n est réalisé, seuls A et C participent à la $n+1$-ième manche. Bien entendu, C vise A et A vise C. Ainsi, A_{n+1} est réalisé si et seulement si A réussit son tir, et C rate le sien. Ainsi :

$$P(A_{n+1} \mid AC_n) = P(U \cap \overline{W}) = P(U)P(\overline{W}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{9}}.$$

De même :

$$P(B_{n+1} \mid BC_n) = P(V \cap \overline{W}) = P(V)P(\overline{W}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}};$$

$$P(C_{n+1} \mid AC_n) = P(W \cap \overline{U}) = P(W)P(\overline{U}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{9}};$$

$$P(C_{n+1} \mid BC_n) = P(W \cap \overline{V}) = P(W)P(\overline{V}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{6}};$$

(f) Enfin, si ABC_n est réalisé, $\varnothing_{n+1}$ ne peut l'être car personne ne vise C lors de la $n+1$-ième manche, donc $\boxed{P(\varnothing_{n+1} \mid ABC_n) = 0.}$

Si AC_n est réalisé, pour que $\varnothing_{n+1}$ le soit, il faut et il suffit que A et C, les deux seuls joueurs s'affrontant lors de la manche $n+1$, réussissent tous deux leurs tirs au cours de cette manche :

$$P(\varnothing_{n+1} \mid AC_n) = P(U \cap W) = P(U)P(W) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}.$$

De même : $P(\varnothing_{n+1} \mid BC_n) = P(V \cap W) = P(V)P(W) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

3. **Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles le combat s'achève**

On note T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse la combat, c'est-à-dire au delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

(a) $[T=1]$ est réalisé si et seulement si A_1, B_1, C_1 ou $\varnothing_1$ est réalisé. Comme ABC_0 est l'événement certain, et que les événements $_1$, B_1, C_1 et $\varnothing_1$ sont deux à deux incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} P(T=1) &= P(A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup \varnothing 1) = P(A_1) + P(B_1) + P(C_1) + P(\varnothing_1) \\ &= P(A_1 \mid ABC_0) + P(B_1 \mid ABC_0) + P(C_1 \mid ABC_0) + P(\varnothing_1 \mid ABC_0). \end{aligned}$$

En utilisant les probabilités conditionnelles calculées dans la question précédente,

$$\boxed{P(T=1) = 0 + 0 + \frac{4}{9} + 0 = \frac{4}{9}}.$$

(En effet, C ne peut pas être éliminé au premier tour, puisque personne ne le vise, alors l'événement $[T=1]$ est en fait égal à l'événement C_1).

(b) Soit $n \geqslant 2$. Calculons la probabilité que les trois joueurs soient encore présents après le n-ième tour :

$$\begin{aligned}
P(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \cdots \cap ABC_n) &= P(ABC_0 \cap ABC_2 \cap \cdots \cap ABC_n) \\
&= P(ABC_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} P(ABC_k \mid ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{k-1}) \\
&\qquad \text{(formule des probabilités composées)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} P(ABC_k \mid ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{k-1})
\end{aligned}$$

Or, la suite $(ABC_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements, donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{k-1} = ABC_{k-1}$. Ainsi :

$$P(ABC_n) = P(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \cdots \cap ABC_n) = \prod_{k=1}^{n} P(ABC_k \mid ABC_{k-1}) = \boxed{\left(\frac{1}{9}\right)^n},$$

d'après la question 2b.

(c) Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Commençons par calculer la probabilité de R_k, c'est-à-dire de l'événement : « à l'issue du n-ième tour, seul B a été éliminé, et il a été éliminé lors du $k+1$-ième tour » :

$$\begin{aligned}
P(R_k) &= P(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \cdots AC_n) \\
&= P(ABC_0 \cap ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \cdots AC_n) \\
&= P(ABC_0) \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} P(ABC_i \mid ABC_0 \cap \cdots \cap ABC_{i-1})\right) \cdot P(AC_{k+1} \mid ABC_0 \cap \cdots \cap ABC_k) \cdot \\
&\qquad \cdot \left(\prod_{i=k+2}^{n} P(AC_i \mid ABC_0 \cap \cdots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \cdots \cap AC_{i-1})\right) \\
&\qquad \text{(formule des probabilités composées)}
\end{aligned}$$

Or le résultat à un tour ne dépend que des joueurs présents au début de ce tour, c'est-à-dire des joueurs présents à l'issue du tour précédent. Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(R_k) &= \left(\prod_{i=1}^{k} P(ABC_i \mid ABC_{i-1})\right) \cdot P(AC_{k+1} \mid ABC_k) \cdot \left(\prod_{i=k+2}^{n} P(AC_i \mid AC_{i-1})\right) \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^k \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(P(\overline{U} \cap \overline{W})\right)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^k \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k-1} = \boxed{\frac{2^{n-k}}{9^n}}.
\end{aligned}$$

(L'énoncé semble avoir oublié de nous faire calculer cette probabilité conditionnelle $P(AC_{k+1} \mid ABC_k)$ dans la question précédente...)

Les événements R_k, $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont deux à deux incompatibles, donc, par additivité :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} R_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} P(R_k) = \frac{1}{9^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} = \frac{1}{9^n}\sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2}{9^n}(2^n - 1) = 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right).$$

Ceci représente la probabilité qu'après n épreuves, B et seul B ait été éliminé lors d'un tour précédent (c'est l'événement AC_n). Ainsi :

$$\boxed{P(AC_n) = 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right)}.$$

(d) Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. À nouveau, S_k désigne l'événement consistant à dire que A et seul A est éliminé lors des n premières épreuves, et ceci à la $k+1$-ième épreuve. Ainsi, l'union des S_k est l'événement : « A, et seul A, a été éliminé au cours des n premières épreuves ».

Calculons pour commencer $P(S_k)$; on procède de la même manière que pour $P(R_k)$. Nous avons donc besoin comme précédemment d'une probabilité conditionnelle qui n'a pas été calculée dans la question 2 :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ P(BC_{i+1} \mid BC_i) = P(\overline{V} \cap \overline{W}) = P(\overline{V})P(\overline{W}) = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, le même raisonnement que plus haut amène :

$$\begin{aligned} P(S_k) &= \left(\prod_{i=1}^{k} P(ABC_i \mid ABC_{i-1})\right) \cdot P(BC_{k+1} \mid ABC_k) \cdot \left(\prod_{i=k+2}^{n} P(BC_i \mid BC_{i-1})\right) \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1} = \boxed{\frac{2}{3^{n+k+1}}}. \end{aligned}$$

Alors : $P(BC_n) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} S_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{3^{n+k+1}} = \frac{2}{3^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^n}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \boxed{\frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n}}.$

(e) Soit $n \geqslant 2$. L'événement $[T > n]$ est réalisé si et seulement s'il reste au moins deux joueurs à l'issue du n-ième tour. Comme AB_n est impossible, on en déduit que $[T > n] = ABC_n \cup AC_n \cup BC_n$. Ces événements étant deux à deux incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} P(T > n) = P(ABC_n) + P(AC_n) + P(BC_n) &= \left(\frac{1}{9}\right)^n + 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right) + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n} \\ &= \boxed{-2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

Remarquez que $P(T > 1) = P(\overline{T = 1}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, donc la formule ci-dessus est encore valable pour $n = 1$, comme on s'en assure rapidement.

De plus, $[T > 0]$ est l'événement certain, donc $P(T > 0) = 1$, et la formule ci-dessus est encore valide pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $[T > n] \subset [T > n - 1]$, et $[T = n] = [T > n - 1] \setminus [T > n]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(T > n - 1) - P(T > n) \\ &= -2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \boxed{-16 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n + 7 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

D'après l'argument concernant $P(T > 1)$ et $P(T > 0)$, ceci redonne bien la valeur $P(T = 1)$ trouvée précédemment.

(f) Un petit calcul de sommes géométriques :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-16 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n + 7 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= -\frac{16}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{14}{9} \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} + \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= -\frac{16}{8} + \frac{14}{7} + 1 = -2 + 2 + 1 = \boxed{1}. \end{aligned}$$

(g) D'après la formule du binôme négatif, les sommes suivantes (à termes positifs) convergent, et leur somme vaut :

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{9})^2} = \frac{81}{64},$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1 - \frac{2}{9})^2} = \frac{81}{49},$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}$;

(on pourra s'assurer de la convergence de ces séries avec la règle de d'Alembert, ou avec la règle $n^\alpha u_n$)

Or, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} nP(T=n)$ est une combinaison linéaire de ces trois séries, donc elle converge également. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nP(T=n) \geqslant 0$, elle est à termes positifs, donc elle converge absolument. Ainsi, T admet une espérance, et :

$$E(T) = -\frac{16}{9}\cdot\frac{81}{64} + \frac{14}{9}\cdot\frac{81}{49} + \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4} = -\frac{9}{4} + \frac{18}{7} + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{51}{28}}.$$

4. **Probabilités pour que A, B et C respectivement remportent le combat**

(a) Notons GA_n l'événement : « A gagne le combat à la n-ième épreuve ».

Si $n = 1$, A ne peut pas gagner le combat, car il reste au moins C à l'issue de la première manche : $P(GA_1) = 0$.

Si $n > 1$, chaque événement U_k entraîne GA_n. Réciproquement, si GA_n est satisfait, ABC_{n-1} n'est pas satisfait (sinon personne ne vise C qui ne peut pas être éliminé au n-ième tour). Puisque AB_{n-1} est impossible, l'événement AC_{n-1} est vérifié (il reste forcément un autre joueur, sinon A aurait gagné avant le n-ième tour). Ainsi, C est éliminé au tour n, et B est éliminé auparavant, c'est à dire lors d'une épreuve ℓ, $\ell \in [\![1, n-1]\!]$; pour une telle valeur de ℓ, $ABC_{\ell-1}$ est satisfait, mais seulement AC_ℓ. En posant $k = \ell - 1$, $k \in [\![0, n-2]\!]$, on en déduit que U_k est satisfait.

Par conséquent, d'après le principe de la double-inclusion, $\boxed{GA_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} U_k.}$

(b) Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. On calcule d'abord la probabilité de U_k, à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$P(U_k) = P(R_{n-1,k}\cap A_n) = P(R_{n-1,k})P(A_n \mid R_{n-1,k}) = \frac{2^{n-1-k}}{9^{n-1}}\cdot P(A_n \mid AC_{n-1}) = \frac{2^{n-1-k}}{9^{n-1}}\cdot\frac{4}{9} = \boxed{\frac{2^{n-k+1}}{9^n}}.$$

Ici, on a rajouté un indice n à R_k pour indiquer la dépendance par rapport à n. Les événements U_k, $k \in [\![0, n-2]\!]$ étant deux à deux incompatibles,

$$P(GA_n) = \sum_{k=0}^{n-2} P(U_k) = 2\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^k} = 4\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \boxed{4\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n - 8\left(\frac{1}{9}\right)^n.}$$

Remarquez qu'on obtient cette égalité beaucoup plus rapidement si on ne suit pas la piste suggérée par l'énoncé (comme quoi, les énoncés sont parfois mal faits ; pour information, à part certaines notations, et l'ajout des questions finales, je n'ai pas modifié le sujet)

En effet, on peut se servir des calculs précédents. On se sert du système complet formé de toutes les possibilités à l'issue du $n-1$-ième tour : $(\varnothing_{n-1}, A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, AB_{n-1}, AC_{n-1}, BC_{n-1}, ABC_{n-1})$. Or GA_n est impossible si un des événements suivants a lieu : $\varnothing_{n-1}$, A_{n-1} (dans ce cas, il a déjà gagné avant), B_{n-1}, C_{n-1}, BC_{n-1} et ABC_{n-1} (car C ne peut pas être éliminé), et comme AB_{n-1} est impossible, la formule des probabilités totales se résume à :

$$P(GA_n) = P(GA_n \mid AC_{n-1})P(AC_{n-1}) = P(A_n \mid AC_{n-1})P(AC_{n-1}) = \boxed{\frac{8}{9}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)}.$$

On obtient bien la même expression, sans avoir à refaire de calculs de somme.

(c) Soit GA l'événement : « A gagne ». Alors $GA = \bigcup_{n=2}^{+\infty} GA_n$, ces événements étant deux à deux incompatibles. Ainsi, par σ-additivité de P :

$$P(GA) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(GA_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} 4\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n - 8\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{16}{81}\frac{1}{1-\frac{2}{9}} - \frac{8}{81}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{16}{63} - \frac{1}{9} = \frac{9}{63} = \boxed{\frac{1}{7}}.$$

(d) On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, GB_n l'événement : « B gagne au n-ième tour », et GB l'événement : « B gagne ».

B ne peut pas être vainqueur des le premier tour (C n'est pas éliminé à ce moment), donc GB_1 est impossible.

Soit $n \geqslant 2$. On peut bien sûr copier la démonstration précédente, telle que suggérée dans l'énoncé, en introduisant des événements V_k adéquats. Je vais plutôt utiliser la deuxième méthode que j'ai proposée, en utilisant le même système complet. Maintenant, les seuls événements au rang $n-1$ pouvant amener GB_n sont : AB_{n-1} et BC_{n-1}, et AB_{n-1} est impossible. Donc, la formule des probabilités totales se résume à :

$$P(GB_n) = P(GB_n \mid BC_{n-1})P(BC_{n-1}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{9^{n-1}}\right) = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{9}\right)^n}.$$

En sommant ces probabilités, on obtient :

$$P(GB) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2} - \frac{3}{81}\cdot\frac{9}{8} = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

(e) On note de même GC_n et GC. On a déjà eu l'occasion de calculer $P(GC_1) = \frac{4}{9}$.
Soit $n \geqslant 2$. On procède de même que pour GB_n. Les événements au rang $n-1$ pouvant amener GC_n sont cette fois ABC_{n-1}, AC_{n-1} et BC_{n-1}. Ainsi, la formule des probabilités totales se résume à :

$$\begin{aligned} P(GC_n) &= P(GC_n \mid ABC_{n-1})P(ABC_{n-1}) + P(GC_n \mid AC_{n-1})P(AC_{n-1}) + P(GC_n \mid BC_{n-1})P(BC_{n-1}) \\ &= P(C_n \mid ABC_{n-1})P(ABC_{n-1}) + P(C_n \mid AC_{n-1})P(AC_{n-1}) + P(C_n \mid BC_{n-1})P(BC_{n-1}) \\ &= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{9}\cdot\left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{9^{n-1}}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n}. \end{aligned}$$

On pourrait bien sûr retrouver ce résultat en définissant des événements du type des U_k, mais ce sont des prises de tête assurées.

Ainsi, en sommant ces probabilités pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(GC) = \frac{4}{9} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{4}{9} + \frac{1}{162}\cdot\frac{9}{8} + \frac{1}{18}\cdot\frac{3}{2} + \frac{4}{81}\cdot\frac{9}{7} = \frac{603}{1008} = \boxed{\frac{67}{112}}$$

(f) C a plus d'une chance sur 2 de gagner, donc beaucoup plus que les deux autres. Il vaut donc mieux ne pas savoir tirer (donc ne pas attirer la foudre des autres).

(g) L'événement « le combat ne s'arrête pas » est l'événement suivant : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [T > n]$.
Ces événements forment une suite décroissante, donc, d'après le théorème de la limite monotone,

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [T > n]\right) = \lim_{n \to +\infty} P(T > n) = 0}.$$

Remarquez que cette question est un peu redondante avec la question 3f.

(h) Soit $G\varnothing$ l'événement : « le combat s'arrête sans vainqueur ». D'après la question précédente, GA, GB, GC, $G\varnothing$ forment un système quasi-complet, donc :

$$P(G\varnothing) = 1 - P(GA) - P(GB) - P(GC) = 1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{67}{112} = \boxed{\frac{15}{112}}.$$