Correction du DM n° 6 (problème obligatoire)

Correction du problème 1 – Étude de la descendance d'un individu

Partie préliminaire

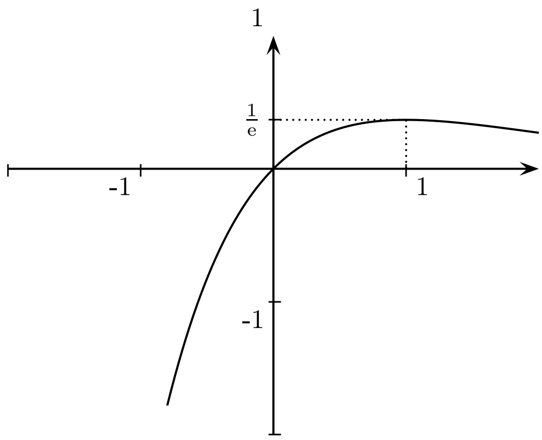
Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0,1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (-x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi, g' est croissante sur $]-\infty, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Elle admet donc un maximum en 1, égal à $g(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$, et par ailleurs $f(0) = 0$. Ainsi, on obtient le graphe suivant :



(b) Soit h la fonction définie pour tout $x \in [0,1]$ par $h(x) = f(x) - x = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)} - x$. La fonction h est dérivable sur $[0,1]$ et :

$$\forall x \in [0,1], \quad h'(x) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(x-1)} - 1.$$

Ainsi, $h'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\lambda\mathrm{e}^{\lambda(x-1)} \geqslant 1$ donc si et seulement si $x-1 \geqslant \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda}$ donc si et seulement si $x \geqslant 1 - \frac{\ln\lambda}{\lambda}$.
Or, d'après la question précédente, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$. Ainsi :

$$\forall x \in [0,1], \quad h'(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\mathrm{e}} - 1$$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$1 - \frac{\ln\lambda}{\lambda}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$
$h(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{1}{\lambda}(1+\ln\lambda) - 1$	$\nearrow$ $+\infty$

On constate maintenant que $h(1)=0$. Ainsi, le minimum de h est négatif. Il est strictement négatif si $\lambda \neq 1$. Ainsi, dans ce cas, h admet deux racines dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection appliquée une première fois sur l'intervalle $]-\infty, 1-\frac{\ln\lambda}{\lambda}[$ et une deuxième fois sur $]1-\frac{\ln\lambda}{\lambda}[$. Une de ces racines est 1, donc dans $[0,1]$. Déterminons à quelle condition la seconde racine est aussi élément de $[0,1]$. C'est le cas si le minimum de h est atteint en une valeur plus petite que 1 et que $h(0) \geqslant 0$, donc si $\lambda > 1$, la condition sur $h(0)$ étant toujours vérifiée puisque $h(0)=\frac{1}{\mathrm{e}}$. Ainsi :

- si $\lambda > 1$, h admet deux racines dans $[0,1]$,
- si $\lambda \leqslant 1$, h n'admet qu'une racine, égale à 1.

On désigne désormais par ℓ la plus petite solution dans $[0,1]$ de l'équation $f(x)=x$

2. La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle stable $\mathbb{R}_+$. De plus $u_1 = \mathrm{e}^{-\lambda} > u_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{n-1} < u_n$. Alors, en appliquant la fonction f strictement croissante, $f(u_{n-1}) < f(u_n)$, donc $u_n < u_{n+1}$. Par conséquent, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

   De plus $u_0 < \ell$. Soit n tel que $u_n < \ell$. Alors, f étant strictement croissante, $u_{n+1} = f(u_n) < f(\ell) = \ell$. Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$.

   Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée, donc convergente. De plus, en passant à la limite dans la relation de récurrence, du fait que f est continue (à ne pas oublier !), elle converge vers un point fixe de f. Si $\lambda = 1$, il n'y a qu'un point fixe, ℓ, donc f tend vers ℓ. Sinon, soit ℓ' le deuxième point fixe. Par définition, $\ell' > \ell$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell' - u_n > \ell' - \ell > 0$, donc $(|u_n - \ell'|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

3. Soit $\alpha > 0$ Par définition des limites, il existe $n_\alpha \in \mathbb{N}$, $\quad \forall n \geqslant n_\alpha, \ell - \alpha < x_n < \ell + \alpha$, donc en particulier $\ell < x_n + \alpha$. De plus, (x_n) étant strictement croissante de limite ℓ, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < \ell$. Ainsi pour tout $n \geqslant n_\alpha$,
$$x_n < \ell < x_n + \alpha.$$
   Si $\ell = 1$, l'expression à démontrer ensuite n'a pas de sens (ou plutôt est toujours vérifiée, le quantificateur portant sur un ensemble vide).

   Supposons maintenant que $\ell < 1$, et soit $\alpha \in]0, 1-\ell[$. Alors pour tout $n \geqslant n_a$, $\ell < u_n + \alpha < 1$. Sur l'intervalle $]\ell, 1[$, h est strictement négative, donc
$$\forall n \geqslant n_\alpha, \quad h(x_n+\alpha) < 0, \qquad \text{soit:} \qquad f(x_n+\alpha) - (x_n+\alpha) < 0.$$

4. On prend $\alpha = 10^{-6}$. Tant que $x_n + \alpha \leqslant \ell$, on a $f(x_n+\alpha) \geqslant x_n + \alpha$. Ainsi, dès que l'on obtient $f(x_n+\alpha) < x_n+\alpha$ (et d'après la question précédente, cela va finir par être le cas), on a : $u_n < \ell < u_n + \alpha$. Ainsi, u_n donnera une valeur approchée à 10^{-6}. Pour être rigoureux, à cause des erreurs d'arrondi, pour être sûr d'obtenir à l'affichage une valeur approchée à 10^{-6} de ℓ, il faudrait prendre α un peu plus petit ; on néglige cette erreur.

   On écrit un programme en Pascal.

```
program dm13;

const alpha=0.000001;
var lambda,y:real;

function f(x:real):real;
begin
  f:=exp(lambda*(x-1));
end;

begin
  writeln('Entrez la valeur de lambda: ');
  readln(lambda);
  if lambda<0
  then
```

```
      write('Valeur erronée');
    else
      if lambda <=1
      then
        writeln{'La valeur exacte de l est 1'}
      else
        begin
          u:=0;
          repeat
            u:=f(u);
            y:=u+alpha;
          until
            f(y)-y<0;
          writeln('Une valeur approchée à 10^-6 de l est: ',u);
        end;
  end.
```

Partie I – Nombre moyen de descendants

1. (a) Par définition, $X_1 = X$, donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On donne l'expression de la loi :

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_1 = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors, si $[X_n = p]$ est réalisé, alors X_{n+1} est égal à la somme du nombre de descendants de première génération de chacun des p descendants de n-ième génération. Ainsi, c'est par hypothèse la somme de p variables *mutuellement indépendantes* suivant toutes la même loi que X :

$$(X_{n+1} \mid X_n = p) = Y_1 + \cdots + Y_p,$$

où les Y_i, $i \in [\![1, p]\!]$, sont mutuellement indépendantes, et où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Par stabilité des lois de Poisson, on en déduit que

$$(X_{n+1} \mid X_n = p) \hookrightarrow \mathcal{P}(p\lambda) \qquad \text{soit:} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = k \mid X_n = p) = \mathrm{e}^{p\lambda} \cdot \frac{(p\lambda)^k}{k!}.$$

2. **Nombre moyen de descendants à la n-ième génération d'un individu**

   (a) Il faudrait rajouter une question dans l'énoncé : la justification de la convergence de cette série G_Y, pour toute variable aléatoire Y. Collons-nous y.
   Soit Y une variable aléatoire. Tout d'abord, la série définissant G_Y est à termes positifs, pour tout $x \in [0, 1]$. D'autre part :

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leqslant P(Y = k)x^k \leqslant P(Y = k),$$

et par définition d'une variable aléatoire, $\sum P(Y = k)$ converge, de somme égale à 1. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum P(Y = k)x^k$ converge.
   Calculons G_X. C'est la série génératrice de la loi de Poisson :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit une relation de récurrence entre $G_{X_{n+1}}$ et G_{X_n}, en utilisant la loi conditionnelle trouvée précédemment. D'apèrs la formule des probabilités totales appliquée au système complet $([X_n = p])_{p \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = k) &= \sum_{p=0}^{+\infty} P(X_{n+1} = k \mid X_n = p)P(X_n = p) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^k}{k!} P(X_n = p) \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la série génératrice de X_{n+1} :

$$\forall x \in [0,1], \quad G_{X_{n+1}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1}=k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^k}{k!} P(X_n = p)x^k.$$

Comme cette série est absolument convergente (elle converge d'après ce qu'on a fait précédemment, et elle est à termes positifs), on peut inverser les deux sommes, et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1], \quad G_{X_{n+1}}(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^k}{k!} P(X_n = p)x^k. \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} P(X_n = p)\mathrm{e}^{\lambda p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p x)^k}{k!} = \sum_{p=0}^{+\infty} P(X_n = p)\mathrm{e}^{\lambda p}\mathrm{e}^{\lambda p x} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} P(X_n = p)(\mathrm{e}^{\lambda(x-1)})^p = G_{X_n}(\mathrm{e}^{\lambda(x-1)}) = G_{X_n} \circ G_X(x).
\end{aligned}$$

(b) On admet que la série définissant G_Y est dérivable terme à terme sur $[0,1]$. Alors, étant donné $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0,1], \quad G'_{X_n} = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X_n = k)x^{k-1} \qquad \text{donc:} \qquad E(X_n) = G'_{X_n}(1).$$

De même, $E(X_{n+1}) = G'_{X_{n+1}}(1)$. Or, la relation de la question précédente entre G_{X_n} et $G_{X_{n+1}}$ permet de trouver une relation sur leur dérivée. La dérivabilité n'étant pas à justifier d'après l'énoncé, on obtient :

$$\forall x \in [0,1], \; G'_{X_{n+1}}(x) = G'_X(x)G'_{X_n} \circ G_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(x-1)} G'_{X_n}(\mathrm{e}^{\lambda(x-1)}).$$

En particulier :

$$E(X_{n+1}) = G'_{X_{n+1}}(1) = \lambda G'_{X_n}(1) = \lambda E_(X_n).$$

(c) On déduit de la question précédente que $(E(X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison λ, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_n) = \lambda^{n-1}E(X_1) = \lambda^{n-1}\lambda = \lambda^n.$$

Ainsi :
- si $\lambda < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n) = 0$ (la descendance a tendance à s'éteindre),
- si $\lambda = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n) = 1$ (la population est stable),
- si $\lambda > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n) = +\infty$ (la descendance s'accroît de manière exponentielle).

Partie II – De la probabilité d'extinction de la descendance d'un individu

Je rétablis la numérotation correcte des questions ; vous ferez la bijection.

1. (a) u_1 est la probabilité que la descendance s'éteigne à la première génération, donc que l'individu n'ai pas d'enfants. Donc :

$$u_1 = P(X_1 = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda} = f(0) = f(u_0).$$

(b) Supposons que l'individu a exactement k enfants. Notons $Y_1, \dots, Y_k$ le nombre d'enfants de chacun de ces enfants. Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, et ces variables sont indépendantes, par conséquent :

$$P(X_2 = 0 \mid X_1 = k) = P(Y_1 = 0, Y_2 = 0, \dots, Y_k = 0) = P(Y_1 = 0) \cdots P(Y_k = 0) = (\mathrm{e}^{-\lambda})^k = \mathrm{e}^{-\lambda k}.$$

On en déduit la valeur de u_2 à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au sysème complet $([X_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
u_2 = P(X_2 = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_2 = 0 \mid X_1 = k)P(X_1 = k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda k}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \mathrm{e}^{\lambda})^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{\lambda}} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\lambda}-1)} = f(\mathrm{e}^{\lambda}) = f(u_1).
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors, si on suppose que l'individu a k enfant et qu'on note $Y_1, \dots, Y_k$ le nombre de descendants de n-ième génération de chacun de ces enfants, les variables Y_i sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi que X_n. Ainsi :

$$P(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = k) = P(Y_1 = 0, \dots, Y_k = 0) = P(Y_1 = 0) \cdots P(Y_k = 0) = P(X_n = 0)^k = u_n^k.$$

Alors, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $([X_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$, on obtient :

$$u_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = k) P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n^k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda u_n} = f(u_n).$$

Remarquez qu'on n'a pas besoin de raisonnements aussi compliqués pour parvenir à ce résultat. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 0) = G_{X_n}(0)$. Or, d'après la relation de récurrence trouvée pour G_{X_n}, et d'après la valeur de G_X, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_{X_n} = f^n$, où la puissance f^n désigne la *composition itérée* de n fonctions égales à f. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = f^{n+1}(0) = f(f^n(0)) = f(u_n).$$

Cela me semble un peu plus rapide et plus élégant (mais ça, c'est une appréciation personnelle).

3. La probabilité d'extinction de la descendance est la probabilité de l'union des événements $[X_n = 0]$, $n :\in \mathbb{N}^*$. Ces événements formant une suite croissante, on obtient, d'après la propriété des limites monotones :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X_n = 0]\right) = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell,$$

où ℓ est la limite déterminée dans la partie 1. Ainsi, si on note p_λ la probabilité d'extinction :
- $p_5 \simeq 0.006977$;
- $p_3 \simeq 0.059520$;
- $p_2 \simeq 0.203188$;
- si $\lambda \leqslant 1$, $p_\lambda = 1$ (la descendance s'éteint presque sûrement).

Partie III – Du nombre moyen de générations de la descendance d'un individu

1. (a) L'événement $[D > n]$ est réalisé si et seulement si l'individu a des descendants de $n+1$-ième génération (la descendance ne s'arrête pas lors d'une génération 1 à n), donc si $[X_{n+1} \neq 0]$. Ainsi,

$$P(D > n) = P(X_{n+1} \neq 0) = 1 - P(X_{n+1} = 0) = 1 - u_{n+1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(D = n) = P([D > n-1] \setminus [D > n]) = P(D > n-1) - P(D > n) \\ = 1 - u_n - 1 + u_{n+1} = u_{n+1} - u_n. \end{aligned}$$

(b) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} kP(D = k) = \sum_{k=0}^{n} (ku_{k+1} - ku_k) = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)u_k - \sum_{k=0}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} -u_k + nu_{n+1} = S_n + n(u_{n+1} - 1).$$

(c) Pour montrer que D est une variable aléatoire, il faut vérifier que la somme des probabilités est 1. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} P(D = k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1}.$$

Ainsi, d'après la partie 1, la série converge, et : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(D = k) = \ell$.

Par conséquent, D est une variable aléatoire si et seulement si $\ell = 1$, donc si $\lambda \leqslant 1$.

2. *On suppose dans cette question que $\lambda = 1$.*

(a) On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = 1 - u_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad w_n = \frac{1}{v_n}.$$

Puisque $\lambda = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - f(u_n) = 1 - f(1 - v_n) = g(v_n),\ \text{où } g : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = \frac{1}{g(v_n)} - \frac{1}{v_n}.$$

En utilisant un développement limité de l'exponentielle, (v_n) étant de limite nulle,

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{v_n}} = \frac{1}{v_n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_n}{2} + o(v_n)} = \frac{1}{v_n}(1 + \frac{v_n}{2} + o(v_n) = \frac{1}{v_n} + \frac{1}{2} + o(1).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2} + o(1).$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{2}$.

(b) Nous utilisons le théorème de Cesaro, admis dans l'énoncé :

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} w_k - w_{k-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n - w_0}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n}{n}.$$

Ainsi, $w_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$, donc $1 - u_n = v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

(c) La série $\sum \frac{2}{n}$ diverge, et est à termes positifs. D'après la règle des équivalents, $\sum(1 - u_n)$ diverge. Ainsi, d'après la question 1b, D n'admet pas d'espérance.

3. *On suppose dans cette question que $\lambda < 1$.*

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$. On a donc :

$$\forall x \in [0, 1],\ |f'(x)| \leqslant \lambda.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(1) - f(u_n)| \leqslant \left| \int_{u_n}^{1} f'(x)\ \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_{u_n}^{1} |f'(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_{u_n}^{1} \lambda\ \mathrm{d}x = \lambda(1 - u_n).$$

Pr conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 - u_{n+1} \leqslant \lambda(1 - u_n).$$

Il en résulte, par une récurrence immédiate, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 - u_n \leqslant \lambda^n(1 - u_0) = \lambda^n.$$

(b) Ainsi, $\sum 1 - u_n$ et $\sum \lambda^n$ étant à termes positifs, et $\sum \lambda^n$ étant convergente, le théorème de comparaison des séries à termes positifs amène la convergence de $\sum 1 - u_n$. Cela prouve la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La majoration de $1 - u_n$ donne également une majoration de $|S - S_n|$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |S - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} 1 - u_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |1 - u_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda^k = \frac{\lambda^{n+1}}{1 - \lambda}.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|n(u_{n+1}-1)| \leqslant n\lambda^n \leqslant e^{nln\lambda + \ln n}$. Comme $\ln\lambda < 0$, cette expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (croissances comparées). Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} n(u_{n+1}-1) = 0.$$

On déduit, des questions 1b et 3b, que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} kP(D=k)\right)$ admet une limite. Ainsi, la série $\sum kP(D=k)$ est convergente, et comme elle est à termes positifs, elle est absolument convergente. Cela prouve l'existence de l'espérance de D.

(d) D'après la question 3b, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la question 1b donne une valeur approchée de $E(D)$ avec une marge d'erreur de $\frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$. On obtient donc une condition d'arrêt. On s'arrête dès que $\frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} < 10^{-6}$, donc $n+1 > \frac{\ln((1-\lambda)10^{-6})}{\ln\lambda}$. Cela donne une condition d'arrêt explicite (on connaît à l'avance le rang d'arrêt), on peut donc utiliser une boucle for.

Je me contente d'écrire une fonction, en supposant que la fonction f a été déclarée telle que plus haut. Je fais rentrer lambda en paramètre de la fonction. Cette fonction renvoie la valeur approchée recherchée. Ainsi :

```
function esperance(lambda: real):real;
var k,n:integer;
    u,S:real;
  begin
    S:=1
    u:=0
    n:=trunc(ln(0.000001*(1-lambda))/ln(lambda));
    for k:=1 to n do
      begin
        u:= f(u);
S:=S+1-u;
      end;
    esperance:= S+n*(f(u)-1);
  end;
```