DM n° 7 : Intégrales impropres

Correction de l'exercice 1 – (EDHEC 1999)

1. (a) On retire une boule tous les tirages impairs. Ainsi, la i-ième retirée est tirée au tirage $2i-1$; en particulier, la n-ième et dernière boule est retirée au tirage numéro $2n-1$. Ainsi, On effectue $N = 2n-1$ tirages.

   (b) Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$, Avant le $2j$-ième tirage, on a retiré une boule à chaque tirage $2i-1$, $i \in [\![1, j]\!]$, donc on a retiré j boules. Ainsi, il reste avant le $2j$-ième tirage, $n-j$ boules.

   Au $2j$-ième tirage, on ne retire pas de boule, donc il reste avant le $2j+1$-ième tirage $n-j$ boules également.

2. (a) • L'événement $[X_1 = 1]$ est réalisé si et seulement si on tire une boule noire au premier tirage. Il y a initialement 1 boule noire parmi n boules. Le tirage se faisant avec équiprobabilité de tirage de chacune des boules,

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{n}.$$

   • L'événement $[X_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si on tire une boule noire au deuxième tirage. Le premier tirage se faisant sans remise, il faut pour cela avoir tiré une boule blanche au premier tirage (sinon on retire l'unique boule noire du jeu). Ainsi

$$[X_2 = 1] = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 1],$$

   et donc, d'après la formule des probabilités conditionnelles, puisque $[X_1 = 0]$ n'est pas quasi-impossible,

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

   En effet, si on a tiré une boule blanche au premier tirage, il reste une boule noire parmi $n-1$ boules au total à l'issue du premier tirage, d'où l'expression de la probabilité conditionelle ci-dessus.

   (b) Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$.

   • L'événement $[X_{2j+1} = 1]$ est réalisé si et seulement si on n'a pas retiré la boule noire du jeu avant le $2j+1$-ième tirage, et si on la tire au $2j+1$-ième tirage. Ainsi, il faut avoir tiré une boule blanche à chaque tirage impair précédant le $2j+1$-ième. Donc

$$P(X_{2j+1} = 1) = P\left(\bigcap_{i=1}^{j}[X_{2i-1} = 0] \cap [X_{2j+1} = 1]\right).$$

   On a donc, d'après la formule des probabilités composées (puisque l'événement $\bigcap_{i=1}^{j}[X_{2i-1} = 0]$ est non quasi-impossible),

$$P(X_{2j+1} = 1) = P(X_1 = 0)P(X_3 = 0 \mid X_1 = 0) \times \cdots$$
$$\cdots \times P\left(X_{2j-1} = 0 \mid \bigcap_{i=1}^{j-1}[X_{2i-1} = 0]\right) P\left(X_{2j+1} = 1 \mid \bigcap_{i=1}^{j}[X_{2i-1} = 0]\right)$$

   Or, pour tout $k \in [\![1, j-1]\!]$, si $\bigcap_{i=1}^{k-1}[X_{2i-1} = 0]$ est réalisé, on a retiré $k-1$ boules blanches. Il reste donc avant le tirage $2k-1$, $n-k+1$ boules, dont $n-k$ boules blanches. Ainsi,

$$P\left(X_{2k-1} = 0 \mid \bigcap_{i=1}^{k-1}[X_{2i-1} = 0]\right) = \frac{n-k}{n-k+1}.$$

De même si $\bigcap_{i=1}^{j}[X_{2i-1}=0]$ est réalisé, on a retiré j boules blanches. Il reste donc avant le tirage $2j+1$, $n-j$ boules, dont 1 boule noire. Ainsi,

$$P\left(X_{2j+1}=0 \mid \bigcap_{i=1}^{j}[X_{2i-1}=0]\right)=\frac{1}{n-j}.$$

On en déduit que

$$P(X_{2j+1}=1)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-j}{n-j+1}\times\cdots\times\frac{1}{n-j}=\frac{1}{n}.$$

- De la même façon,

$$\begin{aligned}P(X_{2j+1}=1)&=P(X_1=0)P(X_3=0\mid X_1=0)\times\cdots\\&\cdots\times P\left(X_{2j+1}=0 \mid \bigcap_{i=1}^{j}[X_{2i-1}=0]\right)P\left(X_{2j}=1 \mid \bigcap_{i=1}^{j+1}[X_{2i-1}=0]\right)\end{aligned}$$

et comme précédemment,

$$P(X_{2j+1}=1)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-j-1}{n-j}\times\cdots\times\frac{1}{n-j-1}=\frac{1}{n}.$$

(c) Ainsi, pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, $X_k(\Omega)=\{0,1\}$, et $P(X_k=1)=\frac{1}{n}$. Ainsi, les X_k suivent tous une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.

3. (a) Avant le $2n-2$-ième tirage, on a retiré des boules à tous les tirages $2i-1$, $i\in[\![1,n-1]\!]$, donc on a retiré $n-1$ boules. Il reste donc une seule boule.

Soit la boule noire a été retirée du jeu, donc a été tirée avant, soit elle n'a pas été tirée du jeu, et dans ce cas, elle est forcément tirée au $2n-2$-ième tirage, puisqu'on n'a plus le choix de la boule. Dans les deux cas, la boule noire est tirée avant de $2n-1$-ième tirage, on ne peut donc pas la tirer pour la première fois à ce moment. Ainsi, $P(U_n)=0$.

L'événement U_j est réalisé si et seulement si on ne tire que des boules blanches jusqu'au tirage $2j-1$. Ainsi :

$$U_j=\bigcap_{i=1}^{2j-2}[X_i=0]\cap[X_{2j-1}=1].$$

D'après la formule des probabilités composées

$$P(U_j)=P(X_1=0)P(X_2=0\mid X_1=0)\dots P\left(X_{2j-2}=0 \mid \bigcap_{i=1}^{2j-3}[X_i=0]\right)P\left(X_{2j-1}=1 \mid \bigcap_{i=1}^{2j-2}[X_i=0]\right)$$

Or, si on ne retire pas de boule noire auparavant à chaque tirage, il reste exactement une boule noire, sur un nombre total de boules donné dans la question 1(b). On obtient donc l'expression des probabilités conditionnelles, puis :

$$\begin{aligned}P(U_j)&=\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-2}{n-1}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-j+1}{n-j+2}\frac{n-j}{n-j+1}\frac{1}{n-j+1}\\&=\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2\cdots\left(\frac{n-j+1}{n-j+2}\right)^2\frac{n-j}{(n-j+1)^2}\\&=\frac{n-1}{n}\frac{n-j}{(n-1)^2}=\frac{n-j}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

(b) Si on remet la boule noire en jeu après l'avoir tirée pour la première fois, on la tirera une deuxième fois, puisqu'on tire jusqu'à ce que l'urne soit vide. Ainsi, $[X=1]$ est réalisé si et seulement si la boule noire est retirée du jeu la première fois qu'elle est tirée, donc si et seulement si elle est tirée pour la première fois lors d'un tirage impair. Ainsi,

$$[X_1=1]=\bigcup_{j=1}^{n}U_j=\bigcup_{j=1}^{n-1}U_j,$$

puisque U_n est l'événement impossible.

Les événements U_j, $j \in [\![1, n-1]\!]$ étant deux à deux incompatibles, il vient alors :

$$P(X=1) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

(on a effectué un changement d'indices $j' = n - j$)

(c) L'événement $[X = n]$ est réalisé si et seulement si on tire $n-1$ fois la boule noire avec remise, avant de la tirer définitivement une n-ième fois sans remise. Or, parmi les $2n-1$ tirages effectués, n se font sans remise, et $n-1$ avec remise. Ainsi, on doit tirer une boule noire à chacun des tirages avec remise, donc à chaque tirage pair $2i$, $i \in [\![1, n-1]\!]$. Le dernier tirage sans remise est donc nécéssairement le $2n-1$-ième et dernier. Ainsi,

$$[X = n] = \bigcap_{i=1}^{n-1} ([X_{2i-1} = 0] \cap [X_{2i} = 1]) \cap [X_{2n-1} = 1].$$

En utilisant à nouveau la formule des probabilités totales, sachant qu'avant le tirage $2i-1$, il reste $n-i+1$ boules dont une boule noire, et avant le tirage $2i$, il reste $n-i$ boules dont une noire, on trouve :

$$P(X = n) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{n-i}{n-i+1} \frac{1}{n-i} \right) \cdot \frac{1}{1} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-i+1} = \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n!}$$

(on a fait le changement d'indice $i' = n + 1 - i$ dans le produit).

4. X est le nombre d'occurrences de la boule noire. Les variables X_k prennent la valeur 1 si la boule noire est tirée au k-ième tirage,n la valeur 0 sinon. Ainsi $\sum\limits_{k=1}^{2n-1} X_k$ est la somme des 1, pour tous les rangs k d'apparition de la boule noire, il s'agit donc du nombre d'apparitions de la boule X_k lors des $2n-1$ tirages de l'expérience. Ainsi, $X = \sum\limits_{k=1}^{2n-1} X_k$.

   Puisque chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$, chaque X_i admet une espérance, égale à $\frac{1}{n}$. Ainsi, leur somme (finie) admet également une espérance, et

$$E(X) = \sum_{k=1}^{2n-1} E(X_k) = \frac{2n-1}{n}.$$

5. Soit i un entier naturel compris entre 0 et $n-2$.

   (a) Si l'événement $[X_{2i+1} = 1]$ est réalisé, alors la boule noire est retirée du jeu à l'issue du tirage $2i+1$. Ainsi, on ne peut plus la tirer par la suite, et par conséquent, puisque $j > 0$, l'événement $[X_{2i+j+1} = 1]$ ne peut pas être réalisé. Ainsi :

$$P(X_{2i+j+1} = 1 \mid X_{2i+1} = 1) = 0.$$

   (b) Soit $j \in [\![1, 2n-2i-2]\!]$.

   On a donc $P(X_{2i+j+1} = 1, X_{2i+1} = 1) = 0$. Or, l'événement $[X_{2i+j+1}X_{2i+1} \neq 0]$ ne peut être réalisé que si $[X_{2i+j+1} = 1] \cap [X_{2i+1} = 1]$ (les deux variables ne prenant que des valeurs 0 ou 1) Ainsi,

$$P(X_{2i+j+1}X_{2i+1} \neq 0) = 0,$$

   donc $X_{2i+j+1}X_{2i+1}$ est la variable (quasi)-certaine de valeur 0. Ainsi, $E(X_{2i+j+1}X_{2i+1}) = 0$.

   Les X_i étant des variables de Bernoulli, elles admettent des moments d'ordre 2, donc la covariance demandée existe. De plus,

$$\operatorname{cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = E(X_{2i+1}X_{2i+j+1}) - E(X_{2i+1})E(X_{2i+j+1}) = 0 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2}.$$

6. Soit i un entier naturel compris entre 1 et $n-1$.

(a) Sachant que $[X_{2i}=1]$ est réalisé, la boule noire est encore présente dans l'urne à l'issue du $2i$-ième tirage. Ainsi, dans ce cas, $[X_{2i+2k}=1]$ est réalisé si et seulement si on ne retire pas la boule noire lors des tirages $2\ell-1$, $\ell\in [\![i+1,i+k]\!]$, et qu'on la tire lors du $2i+2k$-ième tirage. Le résultat des autres tirages pairs est sans importance.

Cette description étant donné sous condition de réalisation d'un événement, on ne peut pas l'écrire de manière ensembliste (non existence d' « événements conditionnels »), on l'écrit directement sur les probabilités :

$$P(X_{2i+2k}=1\mid X_{2i}=1)=P\left(\bigcap_{\ell=i+1}^{i+k}[X_{2\ell-1}=0]\cap[X_{2i+2k}=1]\mid[X_{2i}=1]\right)$$

En utilisant de nouveau la formule des probabilités composées, avec la mesure de probabilité $P_{[X_{2i=1}]}$, et en constatant que si on suppose les événements précédents réalisés, il reste avant le tirage $2\ell-1$, $n-\ell+1$ boules dont une noire, et il reste avant le tirage $2i+2k$, $n-i-k$ boules dont une noire, on obtient :

$$P(X_{2i+2k}=1\mid X_{2i}=1)=\left(\prod_{\ell=i+1}^{i+k}\frac{n-\ell}{n-\ell+1}\right)\cdot\frac{1}{n-i-k}=\frac{\prod\limits_{\ell=i+1}^{i+k}(n-\ell)}{\prod\limits_{\ell=i+1}^{i+k+1}(n-\ell+1)}=\frac{\prod\limits_{\ell=i+1}^{i+k}(n-\ell)}{\prod\limits_{\ell=i}^{i+k}(n-\ell)}=\frac{1}{n-i}.$$

(b) Le raisonnement est le même :

$$P(X_{2i+2k+1}=1\mid X_{2i}=1)=P\left(\bigcap_{\ell=i+1}^{i+k+1}[X_{2\ell-1}=0]\cap[X_{2i+2k+1}=1]\mid[X_{2i}=1]\right),$$

donc, de même, à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$P(X_{2i+2k}=1\mid X_{2i}=1)=\left(\prod_{\ell=i+1}^{i+k+1}\frac{n-\ell}{n-\ell+1}\right)\cdot\frac{1}{n-i-k-1}=\frac{\prod\limits_{\ell=i+1}^{i+k+1}(n-\ell)}{\prod\limits_{\ell=i+1}^{i+k+2}(n-\ell+1)}=\frac{\prod\limits_{\ell=i+1}^{i+k+1}(n-\ell)}{\prod\limits_{\ell=i}^{i+k+1}(n-\ell)}=\frac{1}{n-i}.$$

(c) On en déduit que pour tout $j\in[\![1,2n-2i-1]\!]$, en regroupant les deux cas précédents,

$$P(X_{2i}=1,X_{2i+j}=1)=P(X_{2i}=1)P(X_{2i+j}=1\mid X_{2i=1})=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-i}=\frac{1}{n(n-i)}.$$

Or, $X_{2i}X_{2i+j}$ prend ses valeurs dans $\{0,1\}$, et prend la valeur 1 si et seulement si X_{2i} et X_{2i+j} prennent la valeur 1. Cela se fait donc avec une probabilité $\frac{1}{n(n-i)}$. Par conséquent, $X_{2i}X_{2i+j}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n(n-i)}$. Ainsi :

$$E(X_{2i}X_{2i+j})=\frac{1}{n(n-i)}.$$

On en déduit que

$$\operatorname{cov}(X_{2i},X_{2i+j})=E(X_{2i}X_{2i+j})-E(X_{2i})E(X_{2i+j})=\frac{1}{n(n-i)}-\frac{1}{n^2}=\frac{i}{n^2(n-i)}.$$

7. On a donc

$$V(X)=\sum_{i=1}^{2n-1}V(X_i)+2\sum_{1\leqslant m<\ell\leqslant 2n-1}\operatorname{cov}(X_m,X_\ell).$$

Or, ces covariances sont égales à $-\frac{1}{n^2}$ si m est impair, et $\frac{i}{n^2(n-i)}$, si m est pair, $m=2i$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}V(X)&=(2n-1)\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2i+1}^{2n-1}\operatorname{cov}(X_{2i},X_j)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2i}^{2n-1}\operatorname{cov}(X_{2i-1},X_j)\\&=\frac{(2n-1)(n-1)}{n^2}+2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(2n-2i-1)}{n^2(n-i)}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{(2n-2i)}{n^2}\\&=\frac{(2n-1)(n-1)}{n^2}+2\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(n-i)(2i-1)}{i}-4\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n^2},\end{aligned}$$

en effectant dans les deux sommes le changement d'indice $i' = n - i$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} + 2\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(-2i + (2n+1) - \frac{n}{i}\right) - 4\frac{n(n-1)}{2n^2} \\
&= \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} - 4\frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} - \frac{2(n-1)}{n} \\
&= \frac{(n-1)(2n-1-2n+2(2n+1)-2n)}{n^2} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} \\
&= \frac{(n-1)(2n+1)}{n^2} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 – (ESCP 2010)

1. Soit $\alpha > 1$. Puisque $X_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$, pour tout $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) \geqslant 1$, donc

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

   Or, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha > 1$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ converge.

   Cela étant vrai pour tout $\omega \in \Omega$, l'événement A est réalisé de manière certaine, donc $\boxed{P(A) = 1}$.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, et $n \geqslant k$. Par incompatibilité des événements $[X_n = i]$, $i \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X_n > n^\beta) = \sum_{i > n^\beta} P(X_n = i) = \sum_{i > n^\beta} pq^{i-1} = \sum_{i=\lfloor n^b \rfloor + 1}^{+\infty} pq^{i-1} = pq^{\lfloor n^\beta \rfloor} \cdot \frac{1}{1-q} = q^{\lfloor n^\beta \rfloor}.$$

   Or, $0 < q < 1$ et $\lfloor n^\beta \rfloor \geqslant n^\beta - 1$, donc $q^{\lfloor n^\beta \rfloor} \leqslant q^{n^\beta - 1}$. Par conséquent,

$$P(X_n > n^\beta) \leqslant q^{n^\beta - 1}.$$

   Par ailleurs, puisque pour tous événements A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, on a $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$. Par une récurrence immédiate, il vient, pour toute famille $(A_1, \dots, A_N)$ d'événements,

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_N) \leqslant P(A_1) + \dots + P(A_N),$$

   puis, en cas de convergence de la série de droite, si on a une infinité d'événements,

$$P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i).\right)$$

   Ici, $n^2 q^{n^\beta - 1} = \frac{1}{q}e^{2\ln n + n^\beta \ln q} \to 0$, d'après les croissances comparées, puisque $2\ln n + n^\beta \ln q \underset{+\infty}{\sim} n^\beta \ln q \to -\infty$. Ainsi, $q^{n^\beta - 1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$, il résulte du théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum q^{n^\beta - 1}$ converge, puis que $\sum P(X_n > n^\beta)$ converge.

   Par conséquent, d'après la remarque que nous venons de faire :

$$\boxed{[P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} [X_n > n^\beta]\right) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} P(X_n > n^\beta) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} q^{n^\beta - 1}.}$$

   (b) Cela a déjà été fait, et était indispensable pour pouvoir écrire l'inégalité précédente : $\boxed{\text{cette série converge}}$. La logique de l'énoncé des oraux de concours n'est pas toujours parfaite.

(c) Puisque la série de terme général $q^{n^\beta - 1}$ converge, la suite de ses restes tend vers 0, donc

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta-1} = 0.$$

D'après le théorème d'encadrement appliqué à l'inégalité de la question 2(a) (la probabilité étant toujours positive), on en déduit que

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} [X_n > n^\beta]\right) = 0.}$$

(d) D'après le théorème de limite monotone,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} [X_n > n^\beta]\right)\right) = \lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} [X_n > n^\beta]\right),$$

et d'après la question précédente, on obtient : $\boxed{P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} [X_n > n^\beta]\right)\right) = 0}$

3. (a) L'événement A_β est réalisé si et seulement si il existe un rang $k \geqslant 1$ tel que à partir de ce rang, les événements $[X_n > n^b]$ ne sont pas réalisés, donc si et seulement si il existe $k \geqslant 1$ tel que $\bigcap\limits_{n=k}^{+\infty} [X_n \leqslant n^\beta]$ est réalisé, donc si et seulement si $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{+\infty} [X_n \leqslant n^\beta]$ est réalisé. Ainsi

$$\boxed{A_\beta = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} [X_n \leqslant n^\beta]\right)}$$

(b) Or d'après les lois de De Morgan, on a

$$\overline{A_\beta} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} [X_n > n^\beta]\right);$$

C'est l'événement étudié dans les questions précédentes. Ainsi

$$P(\overline{A_\beta}) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{P(A_\beta) = 1}.$$

4. (a) Soit $\omega \in A_\beta$. Alors il existe k tel que pour tout $n \geqslant k$, $X_n(\omega) \leqslant n^b$ (puisque seul un nombre fini de valeurs de n peuvent donner l'inégalité inverse). Ainsi, pour cette valeur de k, on obtient, pour tout $n \geqslant k$,

$$\frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \geqslant \frac{1}{n^\alpha n^\beta} = \frac{1}{n^\alpha n^{1-\alpha}} = \frac{1}{n}.$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, en tant que série de Riemann de paramètre 1. Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } \dfrac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ est divergente.}}$

(b) On en déduit que $A_\beta \subset \overline{A}$, donc que

$$P(\overline{A}) \geqslant P(A_\beta) = 1.$$

Comme une probabilité ne peut pas être plus grande que 1, $P(\overline{A}) = 1$, puis $\boxed{P(A) = 0}$.

Correction du problème 1 – (ESCL 2001) – Endomorphismes cycliques

Partie I – Etude d'un exemple

1. D'après la description de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on a $f(e_1) = e_1 + e_2 - 2e_3$.

   Ainsi, les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Par conséquent, les coordonnées de $f^2(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Par conséquent, la matrice de la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ dans la base $\mathcal{B}$ est : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   En effectuant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient une réduite de Gauss $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ de la matrice B. Cette réduite de Gauss est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, donc est inversible. Ainsi, la matrice B est inversible, donc la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E.
   Notons $b_1 = e_1$, $b_2 = f(e_1)$ et $b_3 = f^2(e_1)$. On a alors $f(b_1) = b_2$, $f(b_2) = b_3$, et

$$[f(b_3)]_{\mathcal{B}} = A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [-e_1 - f(e_1) - f^2(e_1)]_{\mathcal{B}}.$$

   Ainsi, $f(b_3) = -b_1 - b_2 - b_3$. On en déduit la matrice de f dans la base $\mathcal{C} = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$:

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Vérifier que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E, et déterminer la matrice associée à f relativement à cette base.

2. Vérifiont les trois points définissant un cycle.
   - On a :

$$\begin{aligned} f^4(e_1) &= f(f^3(e_1)) = f(-e_1 - f(e_1) - f^2(e_1)) = -f(e_1) - f^2(e_1) - f^3(e_1) \\ &= -f(e_1) - f^2(e_1) + e_1 + f(e_1) + f^2(e_1) = e_1, \end{aligned}$$

     d'où le premier point.
   - Comme $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base, en particulier, elle est génératrice, et toute famille obtenue par adjonction d'un ou plusieurs vecteurs à cette famille l'est encore. Ainsi, $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est une famille génératrice de E.
   - Les calculs précédents montrent que les vecteurs $e_1, f(e_1), f^2(e_1)$ et $f^3(e_2)$ sont deux à deux distincts.

   Ainsi, d'après les définitions données en début de problème, f est cyclique d'ordre 4, et $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f.

3. On a :
   - $f^4(e_1) = e_1$,
   - $f^4(f(e_1)) = f^5(e_1) = f(f^4(e_1)) = f(e_1)$,
   - $f^4(f^2(e_1)) = f^6(e_1) = f^2(f^4(e_1)) = f^2(e_1)$.

   Par conséquent, la matrice de f^4 dans la base $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est I_3, donc $f^4 = \mathrm{id}_E$.

4. Soit λ une valeur propre de f, et x un vecteur propre associé à cette valeur propre. Alors $f(x) = \lambda x$, puis $f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 f(x)$, puis $f^3(x) = f(\lambda^2 x) = \lambda^2 f(x) = \lambda^3 x$ et enfin $f^4(x) = f(\lambda^3 x) = \lambda^3 f(x) = \lambda^4 x$. Or, $f^4 = \mathrm{id}$, donc $f^4(x) = x$. Comme x est non nul, il vient $\lambda^4 = 1$. Ainsi, les seules valeurs propres possibles sont 1, -1, i et $-\mathrm{i}$.

- La matrice de $f+\mathrm{id}$ dans la base $\mathcal{C}$ est : $[f+\mathrm{id}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  Les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 + C_3 = 0$, donc le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$. Ainsi, -1 est une valeur propre de f, un vecteur propre associé étant $e_1 + f^2(e_1)$.

- La matrice de $f+\mathrm{i}\cdot\mathrm{id}$ dans la base $\mathcal{C}$ est : $[f+\mathrm{i}\cdot\mathrm{id}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

  Les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 + \mathrm{i}\,C_3 = -(1+\mathrm{i})C_2$, donc le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{i}\cdot\mathrm{id})$. Ainsi, $-\mathrm{i}$ est une valeur propre de f, un vecteur propre associé étant $e_1 + (1+\mathrm{i})f(e_1) + \mathrm{i}\,f^2(e_1)$.

- La matrice de $f-\mathrm{i}\cdot\mathrm{id}$ dans la base $\mathcal{C}$ est : $[f-\mathrm{i}\cdot\mathrm{id}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

  Les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 - \mathrm{i}\,C_3 = (\mathrm{i}-1)C_2$, donc le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{i}\cdot\mathrm{id})$. Ainsi, i est une valeur propre de f, un vecteur propre associé étant $e_1 + (1-\mathrm{i})f(e_1) - \mathrm{i}\,f^2(e_1)$.

Ayant trois valeurs propres distinctes, on ne peut pas en avoir plus (puisqu'on travaille sur un espace de dimension 3). Il est donc inutile de considérer la quatrième possibilité $\lambda = 1$. De plus, ayant autant de valeurs propres que la dimension de l'espace, on en déduit que f est diagonalisable, et les trois vecteurs propres trouvés forment une base de diagonalisation.

Partie II – Cas général

1. Puisque la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E, son cardinal (égal à p) est supérieur à la dimension de E. Ainsi, $p \geqslant n$.

2. Soit $x \in E$. Comme la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E, x peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs : il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que
$$x = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0).$$
   Appliquons f^p à cette égalité :
$$f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^{p+k}(x_0) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(f^p(x_0)).$$
   Or, par définition d'une famille cyclique, $f^p(x_0) = x_0$. Ainsi $f^p(x) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0) = x$.
   Ceci étant vrai pour tout x de E, on en déduit que $f^p = \mathrm{id}_E$.
   Puisque E est de dimension finie, la bijectivité de l'endomorphisme f de E équivaut à sa surjectivité. Or, si f n'est pas surjective, f^2 non plus, puis f^p non plus, ce qui contredit $f^p = \mathrm{id}_E$ (qui est surjectif). Ainsi, f est surjective, donc bijective.

3. (a) D'après la maximalité de m, la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$ n'est pas libre. Par conséquent, il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ non tous nuls tels que :
$$\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_m f^m(x_0) = 0.$$

Si $\lambda_m = 0$, on obtient une relation non triviale entre les vecteurs $x_0, \dots, f^{m-1}(x_0)$, ce qui contredit la liberté de la famille $(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$. Ainsi, $\lambda_m \neq 0$, et on peut écrire :

$$f^m(x_0) = -\frac{\lambda_0}{\lambda_m} \cdot x_0 - \cdots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \cdot f^{m-1}(x_0).$$

Ainsi, $f^m(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

(b) Soit, pour tout k dans $[\![m, +\infty[\![$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

Dans la question précédente, on a montré $\mathcal{P}(m)$

Soit k dans $[\![m, +\infty[\![$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vrai. Alors il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$ tels que

$$f^k(x_0) = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{m-1} f^{m-1}(x_0).$$

En appliquant f à cette égalité, il vient :

$$f^{k+1}(x_0) = \lambda_0 f(x_0) + \cdots + \lambda_{m-2} f^{m-1}(x_0) + \lambda_{m-1} f^m(x_0).$$

Puisque $f^m(x_0)$ est dans $\text{Vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$, on en déduit que $f^{k+1}(x_0) \in \text{Vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(m)$ est vraie, et pour tout k dans $[\![m, +\infty[\![$, $\mathcal{P}(k)$ entraîne $\mathcal{P}(k+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k dans $[\![m, +\infty[\![$.

(c) On déduit de ce qui précède que $\text{Vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0)) = \text{Vect}(x_0, \dots, f^{p-1}(x_0))$. Or la famille $(x_0, \dots, f^{p-1}(x_0)$ est génératrice de E. Par conséquent,

$$\text{Vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0)) = \text{Vect}(x_0, \dots, f^{p-1}(x_0)) = E,$$

ce qui prouve que la famille $(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$ est génératrice de E. Comme elle est aussi libre, c'en est une base. Son cardinal m est donc égal à la dimension de l'espace E, soit $m = n$.

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} g(f^k(x_0)) &= a_0 f^k(x_0) + a_1 f^{k+1}(x_0) + a_2 f^{k+2}(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{k+n-1}(x_0) \\ &= f^k(a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)) = f^k(f^n(x_0)) = f^{n+k}(x_0), \end{aligned}$$

d'après le choix des coefficients a_i.

On remarquera que cet argument n'est autre que dire que deux polynômes en f commutent pour la composition, ce qui permet d'écrire : $g \circ f^k(x_0) = f^k \circ g(x_0) = f^k(f^n(x_0))$.

Comme cet argument n'avait pas été vu en cours avant le devoir, j'ai développé entièrement la solution.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(f^k(x_0)) = f^n(f^k(x_0))$. C'est vrai en particulier pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Or, $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Ainsi, g et f^n coincident sur tous les vecteurs d'une base. On en déduit que $f^n = g$.

(b) Notons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $b_k = f^{k-1}(x_0)$. Alors,

- pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $f(b_k) = f^k(x_0) = b_{k+1}$,
- $f(b_n) = f^n(x_0) = a_0 x_0 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0) = a_0 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_n$.

Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{C} = (b_1, \dots, b_n)$ est :

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La matrice de $f - \lambda \mathrm{id}_E$ dans la base $\mathcal{C}$ est :

$$[f - \lambda \cdot \mathrm{id}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Les $n-1$ premières colonnes de cette matrice forment une famille libre car c'est une famille échelonnée sur la dernière coordonnée non nulle. Ainsi, $\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \geqslant n - 1$.

Par conséquent, d'après la formule du rang, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \leqslant 1.$$

Ainsi, les sous-espaces propres de f ne peuvent pas être de dimension supérieure à 1. Comme, par définition, $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})$ est un sous-espace propre si λ est une valeur propre, donc si $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) \neq 0$, on en déduit que les sous-espaces propres sont tous de dimension exactement égale à 1.

5. (a) D'après la question 2, $f^n = \mathrm{id}_E$. D'après le cours qu'on a vu depuis, si λ est une valeur propre, et x un vecteur propre associé, on a $f^n(x) = \lambda^n x$. Ce résultat se trouvait directement par la méthode employée dans la question I-4.

Comme $f^n = \mathrm{id}_E$, on en déduit que $x = \lambda^n x$. Or, x étant un vecteur propre, il est non nul, donc $1 = \lambda^n$.

(b) Dans le cas présent, on a $f^n = \mathrm{id}_E$, donc en reprenant les notations de la question précédente, $a_0 = 1$, et $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Ainsi, d'après la question 4(b), la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C} = (x_0, f(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est :

$$[f]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Les seules valeurs propres possibles vérifient $\lambda^n = 1$, ce sont donc les racines n-ièmes de l'unité. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, et $\lambda = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}$ une racine n-ième quelconque de 1. Montrons que cette racine est valeur propre de f.

Soit $x \in E$. Il existe des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \lambda_1 e_0 + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(e_0)$. On a alors

$$f(x) = f(\lambda_1 e_0 + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(e_0)) = \lambda_1 f(e_0) + \cdots + \lambda_n f^n(e_0) = \lambda_n e_0 + \lambda_1 f(e_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e_0).$$

Ainsi, par identification de la décomposition sur cette base, $f(x) = \lambda x$ si et seulement si :

$$\lambda_n = \lambda \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1, n-1]\!], \lambda_k = \lambda \cdot \lambda_{k+1}.$$

Ainsi, les $n-1$ dernières relations fournissent :

$$\lambda_{n-1} = \lambda \cdot \lambda_n, \quad \lambda_{n-2} = \lambda^2 \cdot \lambda_n, \dots, \lambda_1 = \lambda^{n-1} \lambda_n.$$

Cette dernière équation est équivalente à $\lambda_n = \lambda \lambda_1$, du fait que $\lambda^n = 0$.

Ainsi, le vecteur $x = \lambda^{n-1} e_0 + \cdots + \lambda f^{n-2}(e_0) + f^{n-1}(e_0)$, qui est non nul, est un vecteur propre associé à λ. Ainsi, λ est bien une valeur propre.

Ainsi, cela étant vrai pour toute racine n-ième de 1, au nombre de n, on a n valeurs propres distinctes pour l'endomorphisme f de l'espace E de dimension n. Ainsi, f est diagonalisable. Les vecteurs propres trouvés pour chaque valeur de l forment une base de E.