Correction du DM n° 9 : Polynômes d'endomorphisme, produits scalaires

Correction de l'exercice – (extrait de ESCP 1997) – Polynômes de Hermite

1. (a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   - $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $H_0(x) = 1$;
   - $g'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $H_1(x) = x$;
   - $g''(x) = x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $H_2(x) = x^2 - 1$;
   - $g^{(3)}(x) = -x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = (-x^3+3x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $H_3(x) = x^3 - 3$.

   (b) • Suivons l'indication de l'énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$g^{(n+1)}(x) = (g')^{(n)}(x) = h^{(n)}(x) = (g \cdot k)^{(n)}(x),$$
   où $k = -\mathrm{id}$. Ainsi, d'après la formule de Leibniz,
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n+1)}(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} g^{(n-p)}(x)k^{(p)(x)}.$$
   Or, k est une fonction polynomiale de degré 1, donc pour tout $p \geqslant 2$, $k^{(p)} = 0$. Ainsi
   $$\forall x \in \mathbb{R},\quad g^{(n+1)}(x) = \binom{n}{0} g^{(n)}(x)k(x) + \binom{n}{1} g^{(n-1)}(x)k'(x) = -xg^{(n)}(x) - ng^{(n-1)}(x).$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} g^{(n+1)}(x) = x(-1)^n\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} g^{(n)}(x) - n(-1)^{n-1}g^{(n-1)}(x)\\ &= xH_n(x) - nH_{n-1}(x).\end{aligned}$$
   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$H_n'(x) = (-1)^n \left(x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} g^{(n)}(x) + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} g^{(n+1)}(x)\right) = xH_n(x) - H_{n+1}(x) = nH_{n-1}(x),$$
   d'après la relation (1).

   (c) Le calcul de H_0, H_1, H_2, H_3 nous permet de conjecturer que pour tout n, H_n est un polynôme de degré n, de la même parité que n, et de coefficient dominant 1. Montrons cela par récurrence.

   Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: H_n est un polynôme unitaire de degré n, de même parité que n.

   D'après le calcul de H_0 et de H_1, les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vrai. Alors, d'après la relation (1), H_{n+1} est un polynôme, en tant que produit et combinaison linéaires de polynômes (car H_n et H_{n-1} sont des polynômes d'après l'hypothèse de récurrence).

   De plus, d'après l'hypothèse de récurrence, $\deg H_{n+1} = n+1 > 0$ donc, d'après la relation (2) au rang $n+2$, $\deg H'_{n+2} = n+1 > 0$, donc $\deg H_{n+2} = n+2$.

   Par ailleurs, soit pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k le coefficient dominant de H_k. Alors, par hypothèse de récurrence, $a_{n+1} = 1$. De plus, d'après la relation (2), H_{n+2} étant de degré $n+2$ (donc a_{n+2} étant le coefficient du terme de degré $n+2$ de ce polynôme), on a la relation : $(n+2)a_{n+2} = (n+2)a_{n+1}$, donc, puisque $n+2 \neq 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} = 1$.

   Enfin, H_n étant de la parité de n, et X étant impair, XH_n est de la parité de $n+1$. De même, nH_{n-1} est, par hypothèse de récurrence, de la parité de $n-1$, donc de $n+1$. Ainsi, d'après la relation (1), H_{n+1} est de la parité de $n+1$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ La fonction $f_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$ possède deux impropriétés en $-\infty$ et en $+\infty$.

De plus, d'après les théorèmes de croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{n+2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Donc $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, et également au voisinage de $-\infty$. Comme les intégrales

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} et \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

convergent, on en déduit, par comparaison des intégrales de fonctions de signe constant (c'est le cas au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$) par négligeabilité, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$ converge.

Soit maintenant P une fonction polynomiale quelconque. La fonction $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est une combiunaison linéaire finie de fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on obtient la convergence de $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x$.

(b) Tout d'abord, l'intégrale est convergente pour tout polynôme P et Q, d'après la question précédente. Ainsi, $\langle P, Q\rangle$ est définie pour tout couple (P, Q) de polynômes.

Vérifions que cela définit un produit scalaire.

- Soient P, Q, R trois polynômes, et λ un scalaire. Alors

$$\langle \lambda P + Q, R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P(x) + Q(x))R(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x.$$

  Les intégrales étant toutes convergentes, on peut écrire, par linéarité de l'intégrale :

$$\langle \lambda P + Q, R\rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)R(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)R(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = \lambda\langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle.$$

  Ainsi, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.
- Clairement, le produit de polynômes étant commutatif, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
- Étant symétrique et linéaire par rapport à sa première variable, elle est aussi linéaire par rapport à la seconde variable.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est positif. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\langle P, P\rangle \geqslant 0$.
- De plus, pour tout polynôme P, la fonction $x \mapsto P(x)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et positive, on en déduit que $\langle P, P\rangle = 0$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \qquad \text{soit:} \qquad P(x) = 0,$$

  du fait que $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0$.

Ainsi, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}[X]$, donc c'est un produit scalaire.

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$P(x)g^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1}P(x)H_{n-1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \underset{+\infty}{\sim} ax^{d+n-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

où a est le coefficient dominant du polynôme $(-1)^{n-1}P$, et d son degré. Ainsi, d'après les croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\langle H_n, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ainsi, deux cas se produisent :

- Si $n > 0$, alors (la convergence de l'intégrale nous permet d'affirmer l'existence des limites dans la variation de la primitive)
$$\langle H_n, H_0\rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\left[g^{(n-1)}(x)\right]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}} = 0,$$
d'après la question III-1(a), appliquée au polynôme $P = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\langle H_n, H_0\rangle = 0$.
- Si $n = 0$, alors
$$\langle H_0, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = 1,$$
d'après le rappel effectué dans le préambule du problème.

(c) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On a, en utilisant la définition de H_n :
$$\langle H_n, H_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)g^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x.$$
Effectuons une intégration par parties sur cette intégrale, en posant :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad u(x) = H_m(x) \qquad \text{et} \qquad v(x) = g^{(n-1)}(x).$$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad u'(x) = H_m'(x) = mH_{m-1}(x) \qquad \text{et} \qquad v'(x) = g^{(n)}(x).$$
De plus, d'après la question III-1(a), appliquée au polynôme $P = H_m$, on a
$$\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} u(x)v(x).$$
Par conséquent, on peut faire l'intégration par parties directement sur l'intégrale impropre, et :
$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)g^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\left[u(x)v(x)\right]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{(-1)^{n-1}m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(x)g^{(n-1)}(x)\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(x)H_{n-1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = m\left\langle H_{n-1}, H_{m-1}\right\rangle.\end{aligned}$$
Soit $m < n$ deux entiers positifs. Alors, en itérant la relation ci-dessus, on obtient :
$$\langle H_n, H_m\rangle = m!\left\langle H_{n-m}, H_0\right\rangle = 0,$$
puisque $n - m > 0$, et d'après la question 1(b).
Ainsi, les H_n sont deux à deux orthogonaux, donc forment une famille orthogonale.
De plus, de la même façon,
$$\langle H_n, H_n\rangle = n!\left\langle H_0, H_0\right\rangle = n!$$
toujours d'après la question 1(b).

Correction du problème –

Partie I – La suite des noyaux itérés et les sous-espaces caractéristiques

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit $x \in \mathrm{Ker}((u - \lambda id)^k)$. Alors
$$(u - \lambda id)^{k+1}(x) = (u - \lambda \mathrm{id})((u - \lambda \mathrm{id})^k(x)) = (u - \lambda \mathrm{id})(x) = 0.$$
Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}((u - \lambda \mathrm{id})^{k+1})$. On a bien :
$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \boxed{\mathrm{Ker}((u - \lambda \mathrm{id})^k) \subset \mathrm{Ker}((u - \lambda \mathrm{id})^{k+1})}.$$

2. La suite $(\dim \mathrm{Ker}((u-\lambda \mathrm{id})^k))$ est donc une suite d'entiers positifs, croissante, et bornée par n. Elle ne peut pas être strictement croissante (sinon, par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dim \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^k) \geqslant k$, ce qui contredit le fait que cette dimension doit être inférieure à n)
Ainsi, comme elle est croissante mais pas strictement croissante, il existe k_0 tel que
$$\boxed{\mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{k_0}) = \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{k_0+1})}.$$
3. Soit $k \geqslant k_0$, et soit $x \in \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{k+1})$. On a alors
$$0 = (u-\lambda\mathrm{id})^{k+1}(x) = (u-\lambda\mathrm{id})^{k_0+1}((u-\lambda\mathrm{id})^{k-k_0}(x)).$$
Ainsi, $(u-\lambda\mathrm{id})^{k-k_0}(x) \in \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{k_0})$, donc
$$(u-\lambda\mathrm{id})^{k_0}((u-\lambda\mathrm{id})^{k-k_0}(x)) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad (u-\lambda\mathrm{id})^{k}(x) = 0.$$
Ainsi, on a montré que $\mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{k+1}) \subset \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{k})$. L'inclusion réciproque étant aussi vérifiée, d'après la question 1, on en déduit que pour tout $k \geqslant k_0$
$$\mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{k}) = \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{k+1}),$$
et donc $\boxed{\mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{k}) = \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{k_0}).}$
4. Puisque λ est une valeur propre de u, et d'après la question 1, on a :
$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{n_\lambda}) = C_\lambda,$$
donc $\boxed{C_\lambda \neq \{0\}}$.
De plus, soit $x \in C_\lambda$. Alors
$$(u-\lambda\mathrm{id})^{n_\lambda}(u(x)) = u \circ (u-\lambda\mathrm{id})^{n_\lambda}(x),$$
car d'après le cours, deux polynômes d'un même endomorphisme commutent. Ainsi :
$$(u-\lambda\mathrm{id})^{n_\lambda}(u(x)) = u(0) = 0.$$
Donc $u(x) \in C_\lambda$. Par conséquent, $\boxed{C_\lambda \text{ est stable par } u.}$
5. On a, par définition de n_λ, et d'après la question 1 :
$$0 = \dim \mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{id}) < \dim \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^2) < \cdots < \dim \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{n_\lambda}.$$
Ces inégalités strictes étant prises entre des entiers, il en résulte (éventuellement par une récurrence immédiate) que
$$\boxed{\dim C_\lambda = \dim \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id})^{n_\lambda} \geqslant n_\lambda}.$$
6. Supposons que u est diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de u est égale à
$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mu_1 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & \mu_k \end{pmatrix},$$
où les μ_j sont distincts de λ. Ainsi, les matrices de $u-\lambda\mathrm{id}$ et de $(u-\lambda\mathrm{id})^2$ dans cette même base sont respectivement
$$D-\lambda I_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mu_1-\lambda & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & \mu_k-\lambda \end{pmatrix} \text{ et } (D-\lambda I_n)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & (\mu_1-\lambda)^2 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & (\mu_k-\lambda)^2 \end{pmatrix}.$$

Comme les coefficients $\mu_j - \lambda$ sont non nuls, ces deux matrices ont même noyau, égal à l'espace engendré par les ℓ premiers vecteurs de la base $\mathcal{B}$, ℓ étant le nombre d'occurrences de λ sur la diagonale de D.
Ainsi, $Ker(u - \lambda \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}((u - \lambda \mathrm{id})^2)$, donc $\boxed{n_\lambda = 1}$.

Partie II – Polynôme annulateur de u

1. Supposons que μ n'est pas une valeur propre de u. Alors $u - \mu \mathrm{id}$ est un isomorphisme, donc aussi $(u - \mu \mathrm{id})^k$. Soit $x \in E$. On a donc
$$P(u)(x) = 0, \qquad \text{donc:} \qquad (u - \mu \mathrm{id})^k (Q(u)(x)) = 0.$$
Ainsi, $Q(u)(x) \in \mathrm{Ker}((u - \mu \mathrm{id})^k) = \{0\}$ (du fait de la bijectivité), donc $Q(u)(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout x de E, on a $\boxed{Q(u) = 0}$.
2. Supposons que μ est valeur propre de u. D'après la question I-1 (pour le cas où $k \leqslant n_\lambda$) et la question I-3 ainsi que la définition de n_λ (pour le cas $k > n_\lambda$), on a
$$\mathrm{Ker}((u - \mu \mathrm{id})^k) \subset \mathrm{Ker}((u - \mu \mathrm{id})^{n_\lambda}).$$
Or, en adaptant le raisonnement de la question précédente, pour tout $x \in E$, $Q(u)(x) \in \mathrm{Ker}((u - \mu \mathrm{id})^k)$, donc $Q(u)(x) \in \mathrm{Ker}((u - \mu \mathrm{id})^{n_\lambda})$, donc
$$(u - \mu \mathrm{id})^{n_\lambda} \circ Q(u)(x) = 0.$$
Ainsi, ceci étant vrai pour tout x de E, $\boxed{(X - \mu)^{n_\lambda} Q \text{ est un polynôme annulateur de } u}$
3. L'endomorphisme u admet au moins un polynôme annulateur, car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie n^2, donc la famille $(u^0, u^1, \dots, u^{n^2})$ est liée, car de cardinal $n^2 + 1$. Il existe donc des coefficients $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$ tels que
$$\lambda_0 u^0 + \cdots + \lambda_{n^2} u^{n^2} = 0.$$
Par conséquent, $\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$ est un polynôme annulateur de u.
Soit donc P un polynôme annulateur quelconque de u. Quitte à le diviser par son coefficient dominant (ce qui ne change pas son caractère annulateur), on peut supposer que P est unitaire.
D'après une propriété du cours, toutes les valeurs propres de u sont des racines de P. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de u, et $\mu_1, \dots, \mu_\ell$ les autres racines de P. Il existe donc des entiers strictement positifs $a_1, \dots, a_k$ et $b_1, \dots, b_\ell$ tels que
$$P = \prod_{i=1}^{\ell} (X - \mu_i)^{b_i} \prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)^{a_j}.$$
D'après la question 1 appliqué successivement aux racines $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell$, on en déduit que le polynôme
$$P_1 = \prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)^{a_j}$$
est encore un polynôme annulateur de u. On applique ensuite la question 2, successivement aux racines $\lambda_1, \dots \lambda_i$ (en passant le facteur correspondant à la gauche de l'expression, ce qu'on peut faire par commutativité du produit des polynômes), on en déduit que $\prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)^{n_{\lambda_j}}$ est un polynôme annulateur de u, c'est-à-dire que $\boxed{\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda} \text{ est un polynôme annulateur de } u}$.
4. D'après la question I-6, si u est diagonalisable, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $n_\lambda = 1$. Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{\text{le polynôme } P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda) \text{ est annulateur de } u}$. Ce polynôme est bien à racines simples.
On aurait pu montrer ce résultat de façon plus élémentaire en calculant $P(D)$, D étant une matrice diagonale, associée à u dans un choix adapté d'une base de E.

Partie III – Expression de E comme somme directe des sous-espaces caractéristiques

1. (a) • Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$. Comme deux polynômes de l'endomorphisme u commutent (et que u est un polynôme en u, associé au polynôme X), on a

$$P(u)(u(x)) = u \circ P(u)(x) = u(P(u)(x)) = u(0) = 0$$

Ainsi $u(x) \in Ker(P(u))$ et donc $\boxed{\operatorname{Ker}(P(u)) \text{ est stable par } u.}$

• Le même raisonnement montre que $\boxed{\operatorname{Ker}(Q(u)) \text{ est stable par } u.}$

(b) Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$. Alors

$$P(u_1)(x) = P(u)(x) = 0.$$

Comme u_1 est définie sur $\operatorname{Ker}(P(u))$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } u_1.}$

De même $\boxed{Q \text{ est un polynôme annulateur de } u_2.}$

(c) Soit λ une racine de Q, alors elle n'est pas racine de P (car P et Q n'ont pas de racine commune). Or, les valeurs propres de u_1 sont nécessairement racines de P (car P est un polynôme anulateur de u_1. Ainsi, λ ne peut pas être valeur propre de u_1.

On peut en conclure que $\boxed{\text{les racines de } Q \text{ ne sont pas valeurs propres de } u_1.}$

En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les racines de Q, on peut alors écrire,

$$Q(u_1) = \alpha(u_1 - \lambda_1 \mathrm{id})^{a_1} \circ \cdots \circ (u_1 - \lambda_k \mathrm{id})^{a_k},$$

où les a_i sont les multiplicités des λ_i comme racine de Q, et α le coefficient dominant (non nul) de Q. Or, les λ_i n'étant pas valeurs propres de u_1, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $u_1 - \lambda_i \mathrm{id}$ est un automophisme de $\operatorname{Ker}(P(u)$, donc aussi $(u_1 - \lambda_i \mathrm{id})^{a_i}$. Ainsi, $Q(u_1)$ s'écrit comme la composée d'automorphismes de $\operatorname{Ker}(P(u))$.

On en déduit que $\boxed{Q(u_1) \text{ est un automophisme de } \operatorname{Ker}(P(u)).}$

(d) Soit alors $x \in \operatorname{Ker}(P(u)) \cap \operatorname{Ker}(Q(u))$. On a :

$$P(u)(x) = Q(u)(x) = 0.$$

Or, comme $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$, $Q(u)(x) = Q(u_1)(x)$. Par ailleurs, $Q(u_1)$ est un automorphisme, donc le fait que $Q(u_1)(x) = 0$ implique que $x = 0$.

Ainsi, $\operatorname{Ker}(P(u)) \cap \operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \{0\}$, et l'inclusion réciproque étant triviale, puisqu'il s'agit de sous-espaces vectoriels, on a l'égalité $\operatorname{Ker}(P(u)) \cap \operatorname{Ker}(Q(u)) = \{0\}$.

Par conséquent, $\boxed{\text{la somme } \operatorname{Ker}(P(u)) + \operatorname{Ker}(Q(u)) \text{ est directe.}}$

2. (a) Soit $x \in \operatorname{Ker}((PQ)(u))$. On a donc

$$P(u) \circ Q(u)(x) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad Q(u)(x) \in \operatorname{Ker}(P(u)).$$

Comme $Q(u_1)$ est un automorphisme de $\operatorname{Ker}(P(u))$, le vecteur $Q(u)(x)$ admet un unique antécédent par $Q(u_1)$. Autrement dit, il existe un unique vecteur x_1 de $\operatorname{Ker}(P(u))$ tel que

$$\boxed{Q(u)(x) = Q(u_1)(x_1) = Q(u)(x_1)}.$$

La question 1(c) s'adapte bien sûr à u_2 et P : $P(u_2)$ est un automophisme de $\operatorname{Ker}(Q(u))$.

Le même raisonnement que ci-dessus permet alors d'obtenir l'existence d'un unique $x_2 \in \operatorname{Ker}(Q(u))$ tel que $\boxed{P(u)(x) = P(u)(x_2).}$

(b) On a :

• $Q(u)(x - x_1) = Q(u)(x) - Q(u)(x_1) = 0$, par définition de x_1.

• $P(u)(x - x_1) = P(u)(x) - P(u)(x_1) = P(u)(x)$, car $x_1 \in \operatorname{Ker}(P(u))$.

Ainsi, $x - x_1$ est dans $\operatorname{Ker}(Q(u))$ et vérifie $P(u)(x - x_1) = P(u)(x)$. Par unicité de x_2 vérifiant cela, on en déduit que $\boxed{x - x_1 = x_2}$

(c) • D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathrm{Ker}((PQ)(u))$, il existe $x_1 \in \mathrm{Ker}(P(u))$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(Q(u))$ tels que $x = x_1 + x_2$. Ainsi,

$$\mathrm{Ker}((PQ)(u)) \subset \mathrm{Ker}\, P(u) + \mathrm{Ker}(Q(u)).$$

• Soit $x = \mathrm{Ker}(P(u)) + \mathrm{Ker}(Q(u))$. Il existe $x_1 \in \mathrm{Ker}(P(u))$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(Q(u))$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a alors

$$(PQ)(u)(x) = Q(u) \circ P(u)(x_1) + P(u) \circ Q(u)(x_2) = Q(u)(0) + P(u)(0) = 0.$$

Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}((PQ)(u))$, donc $\mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}((PQ)(u))$.

Des deux inclusions, et du caractère direct de la somme, prouvé en 1(d), on déduit que

$$\boxed{\mathrm{Ker}((PQ)(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))}.$$

3. Par une récurrence immédiate, si $P_1, \dots, P_k$ sont des polynômes deux à deux sans racine commune, on obtient

$$\mathrm{Ker}((P_1 \cdots P_k)(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i(u)).$$

Ainsi, en appliquant cela avec $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$, et en posant pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $P_\lambda = (X - \lambda)^{n_\lambda}$, les polynômes P_λ sont bien deux à deux sans racine commune, donc

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(P_\lambda(u)) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}((u - \lambda \mathrm{id})^{n_\lambda}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} C_\lambda.$$

Or, d'après la question II-3, P est un polynôme annulateur de u, donc $\mathrm{Ker}(P(u)) = E$. Ainsi, on obtient :

$$\boxed{E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} C_\lambda}.$$

4. Nous avons déjà montré que si u est diagonalisable, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $n_\lambda = 1$.
Montrons la réciproque. Soit u tel que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $n_\lambda = 1$. Notons E_λ les sous-espaces caractéristiques de u. Puisque $n_\lambda = 1$, on a, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda = C_\lambda$. Ainsi,

$$\bigoplus_{\lambda \in E} E_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in E} C_\lambda = E.$$

Ainsi, E est la somme des sous-espaces propres de u, donc u est diagonalisable.
Par conséquent, $\boxed{u \text{ est diagonalisable si et seulement si pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ n_\lambda = 1.}$

5. (a) Soit u_λ la restriction de u au sous-espace stable C_λ. Le polynôme $(X-\lambda)^{n_\lambda}$ est annulateur de u_λ. Ainsi, en posant $v_\lambda = \lambda \mathrm{id}$ et $w_\lambda = u - \lambda \mathrm{id}$, $\boxed{v_\lambda \text{ est diagonalisable}}$ (car c'est une homothétie) et $\boxed{w_\lambda \text{ est nilpotent}}$ (puisque $w_\lambda^{n_\lambda} = 0$), et $\boxed{v_\lambda + w_\lambda = u}$.
De plus, une homothétie commute avec tout endomorphisme, donc $v_\lambda \circ w_\lambda = w_\lambda \circ v_\lambda$.

(b) Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de u. On a donc $E = C_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus C_{\lambda_k}$. On définit alors pour tout x de E, dont la décomposition dans cette somme directe est $x = x_1 + \cdots + x_k$,

$$v(x) = v_{\lambda_1}(x_1) + \cdots + v_{\lambda_k}(x_k) \qquad \text{et} \qquad w = w_{\lambda_1}(x_1) + \cdots + w_{\lambda_k}(x_k).$$

• Soit x et y dans E, de décompositions $x_1 + \cdots + x_k$ et $y_1 + \cdots + y_k$, et $\mu \in \mathbb{C}$. Les C_λ étant des sous-espaces vectoriels, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\mu x_i + y_i$ est dans C_{λ_i}, donc

$$\lambda x + y = (\mu x_1 + y_1) + \cdots + (\mu x_k + y_k)$$

est la décomposition de $\lambda x + y$ dans la somme directe $C_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus C_{\lambda_k}$. Ainsi

$$v(\mu x + y) = v_{\lambda_1}(\mu x_1 + y_1) + \cdots + v_{\lambda_k}(\mu x_k + y_k),$$

et, en utilisant la linéairité des v_λ,

$$v(\mu x+y)=\mu(v_{\lambda_1}(x_1)+\cdots+v_{\lambda_k}(x_k))+v_{\lambda_1}(y_1)+\cdots+v_{\lambda_k}(y_k)=\mu v(x)+v(y).$$

Ainsi, $\boxed{v \text{ est un endomorphisme de } E}$.

On montrerait selon le même principe que $\boxed{w \text{ est un endomorphisme de } E}$.

- Soit λ une valeur propre de u et soit Soit $x\in C_\lambda$ un vecteur propre associé à v_λ. Alors, la décomposition de x dans la somme directe $C_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus C_{\lambda_k}$ est $x=0+\cdots+x+\cdots+0$, le seul terme non nul étant sur le facteur correspondant à C_λ. Ainsi, $v(x)=v_\lambda(x)$, et donc x est aussi un vecteur propre de v.
  Comme les v_λ sont tous diagonalisables, il existe une base des C_λ, constitués de vecteurs propres des v_λ. En juxtaposant ces bases, on obtient une base de leur somme directe, donc de E. Chaque vecteur de cette base est un vecteur propre d'un des v_λ, donc est un vecteur propre de v, d'après ce qu'on vient de voir. Ainsi, on a construit une base de E constituée de vecteurs propres de v, donc $\boxed{v \text{ est diagonalisable}}$.
- Les w_λ étant des endomorphismes de C_λ, si $x=x_1+\cdots+x_k$ est la décomposition de x dans la somme directe $C_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus C_{\lambda_k}$, alors $w(x)=w_{\lambda_1}(x_1)+\cdots+w_{\lambda_k}(x_k)$ est la décomposition de $w(x)$ dans cette même somme directe. Ainsi, un argument de récurrence immédiat permet de montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$,
  $$w^N(x)=w_{\lambda_1}^N(x_1)+\cdots+w_{\lambda_k}^N(x_k).$$
  Soit alors N supérieur au maximum des indices de nilpotence des endomorphismes nilpotents $w_{\lambda_1},w_{\lambda_2},\dots,w_{\lambda_k}$. On a alors, pour tout $x\in E$, $w^N(x)=0$. Donc $\boxed{w \text{ est nipotent}}$.
- Soit $x\in C_\lambda$. On a alors, par définition de v et w, et par commutation de v_λ et w_λ :
  $$v\circ w(x)=v\circ w_\lambda(x)=v_\lambda\circ w_\lambda(x)=w_\lambda\circ v_\lambda(x)=w\circ v(x).$$
  Soit maintenant x quelconque dans E, et $x=x_1+\cdots+x_k$ sa décomposition dans la somme $C_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus C_{\lambda_k}$. On a alors, d'après ce qu'on vient de prouver :
  $$v\circ w(x)=\sum_{i=1}^k v\circ w(x_i)=\sum_{i=1}^k w\circ v(x_i)=w\circ v(x).$$
  Ainsi, $\boxed{v\circ w=w\circ v}$

Partie IV – Polynôme annulateur minimal de u

1. Les valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ sont des racines de P. Soit $\mu_1,\dots,\mu_\ell$ les autres racines éventuelles de P. En notant $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ les multiplicités des racines $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ et $\beta_1,\dots,\beta_\ell$ les multiplicités des racines $\mu_1,\dots,\mu_\ell$, et a le coefficient dominant de P, on obtient la factorisation suivante (dans $\mathbb{C}$) :
   $$P=a(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(X-\lambda_k)^{\alpha_k}(X-\mu_1)^{\beta_1}\cdots(X-\mu_\ell)^{\beta_\ell}.$$
   Les polynômes considérés dans cette factorisation n'ayant pas de racines communes 2 à 2, on obtient, en itérant III-2(c)
   $$\operatorname{Ker}(P(u))=\bigoplus_{i=1}^k\operatorname{Ker}((u-\lambda_i\mathrm{id})^{\alpha_i})\oplus\bigoplus_{j=1}^{\ell}\operatorname{Ker}(u-\mu_j)^{\beta_j}.$$
   Comme les μ_j ne sont pas valeurs propres de u, $u-\mu_j\mathrm{id}$ est inversible, donc aussi $(u-\mu_j)^{\beta_j}$. Ainsi, $\operatorname{Ker}((u-\mu_j)^{\beta_j})=\{0\}$, donc
   $$\operatorname{Ker}(P(u))=\bigoplus_{i=1}^k\operatorname{Ker}((u-\lambda_i\mathrm{id})^{\alpha_i}).$$
   Or, pour tout $\lambda\in\operatorname{Sp}(u)$, $\operatorname{Ker}((u-\lambda)^\alpha)\subset C_\lambda$. Si cette inclusion était stricte pour une des valeurs propres, on aurait alors
   $$\dim\operatorname{Ker}(P(u))=\sum_{i=1}^k\dim(\operatorname{Ker}(u-\lambda_i\mathrm{id})^{\alpha_i})<\sum_{i=1}^k\dim C_{\lambda_i}=\dim E,$$

d'après III-3. Ceci entre en contradiction avec le fait que P soit un polynôme annulateur de u (ce qui signifie que $\dim \operatorname{Ker}(P(u)) = \dim E$.

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\operatorname{Ker}((u - \lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i} = C_{\lambda_i}$. Or, n_{λ_i} est la valeur minimale pour laquelle cette égalité est satisfaite, par définition des sous-espaces caractéristiques. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\alpha_i \geqslant n_{\lambda_i}$.

Ainsi, $\boxed{\text{tout } \lambda \in \operatorname{Sp}(u) \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité au moins égale à } n_\lambda.}$

2. Ainsi, toujours en notant $\lambda_1, \dots \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, et P un polynôme annulateur, P est divisible par $(X - \lambda_1)^{n_{\lambda_1}}$, $(X - \lambda_2)^{n_{\lambda_2}}, \dots, (X - \lambda_k)^{n_{\lambda_k}}$. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, P est divisible par le produit de ces polynômes, donc $\boxed{P \text{ est divisible par } \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda}}$.

   Ainsi, tout polynôme annulateur étant divisible par $\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$, ce polynôme est de degré inférieur ou égal à tout polynôme annulateur (excepté le polynôme nul bien entendu). Comme de plus, $\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$ est un polynôme annulateur de u d'après la question II-3, on en déduit que :

   $\boxed{\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda} \text{ est un polynôme annulateur de degré minimal.}}$

3. D'après la question I-5, pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, $n_\lambda \leqslant \dim(C_\lambda$. Ainsi,

$$\deg \left(\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda} \right) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} n_\lambda \leqslant \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\lambda)} \dim C_\lambda = \dim E = n,$$

   l'avant dernière égalité découlant de III-3.

   $\boxed{\text{Il existe donc un polynôme annulateur de } u \text{ de degré inférieur ou égal à } n.}$

4. Supposons que u admette un polynôme annulateur à racines simples. Alors pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, λ étant racine de P, sa multiplicité est exactement égale à 1. Or, d'après la question IV-2, cette multiplicité est au moins égale à n_λ. Ainsi, $n_\lambda \leqslant 1$. Comme λ est valeur propre, on a aussi $n_\lambda \geqslant 1$. Ainsi, pour tout $l \in \operatorname{Sp}(u)$, $n_\lambda = 1$, et donc

$$C_\lambda = \operatorname{Ker}((u - \mathrm{id})^{n_\lambda}) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) = E_\lambda,$$

   où E_λ désigne le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ. D'après la question III-3, on en déduit que

$$\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda = E,$$

   donc que $\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$

Ce dernier résultat constitue une réciproque de la question II-4.