Lycée La Bruyère, Versailles — 10/09/2011
ECS 2 – Mathématiques

DS n° 1 – Suites et séries

Correction de l'exercice 1 –
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+4}{u_n-1}$.

1. **Étude de l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

(a) • f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• L'équation $f(x) = 2$ équivaut à $2x + 4 = 2x - 2$, donc $4 = -2$, ce qui n'est pas possible. Donc 2 n'est pas dans l'image de f

• Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. L'équation $f(x) = y$ équivaut à $2x + 4 = xy - y$, donc à $x(y - 2) = y + 4$, donc, puisque $y \neq 2$, à $x = \frac{y+4}{y-2}$.
Ainsi, y a un et un seul antécédent par f

On en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et que sa réciproque est donnée, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, par :

$$g(y) = f^{-1}(y) = \frac{y+4}{y-2}.$$

(b) La fonction f étant définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, le seul cas de figure dans lequel (u_n) n'est pas défini est celui où, lors de la construction de (u_n), une valeur donnée prend la valeur 1, empêchant ainsi de continuer à appliquer f.

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie si et seulement s'il existe n tel que $u_n = 1$, c'est-à-dire $f \circ \cdots \circ f(u_0) = 1$, c'est-à-dire $f \circ \cdots \circ f(a) = 1$, le nombre de termes dans cette composition étant n.

Cette condition équivaut à $a = f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}(1) = v_n$, par définition de (v_n).

Ainsi, (u_n) n'est pas bien définie si et seulement s'il existe n tel que $v_n = a$. On obtient le résultat en contraposant.

(c) La fonction g étant un quotient de deux fonctions polynomiales, elle est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad g'(x) = \frac{(y-2)-(y-4)}{(y-2)^2} = -\frac{6}{(y-2)^2} < 0$$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	1

D'après ces variations, $g(]-\infty, 2[) =]-\infty, 1[\subset]-\infty, 2[$, donc l'intervalle $]-\infty, 2[$ est stable par g

Cela prouve au passage que (v_n) est bien définie, puisque $v_0 = 1 \in]-\infty 2[$, et tous ses termes sont dans $]-\infty, 2[$.

Par ailleurs, la décroissance de g va nous permettre d'étudier la monotonie des deux suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}). En effet ces suites extraites sont définies par une relation de récurrence donnée par la fonction $g \circ g$, qui, d'après les règles de composition des variations, est croissante.

On calcule les premiers termes dont on aura besoin : $v_0 = 1$, $v_1 = -5$, $v_2 = \frac{1}{7}$.

On a alors $v_0 > v_2$. Par croissance de $g \circ g$ sur $]-\infty, 2[$, on obtient $g \circ g(v_0) > g \circ g(v_2)$, donc $v_2 > v_4$. En itérant ce processus, l'inégalité de propage à tous les rangs (on ne sort jamais de l'intervalle $]-\infty, 2[$, pas stabilité de cet intervalle), et (v_{2n}) est donc décroissante.

Par ailleurs $(v_{2n+1}) = (f(v_{2n}))$, donc, f étant décroissante, et (v_{2n}) aussi, on en déduit que (v_{2n+1}) est croissante.

(d) On a, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tel que $g(y) \neq 2$,

$$g \circ g(y) = \frac{\frac{y+4}{y-2} + 4}{\frac{y+4}{y-2} - 2} = \frac{5y-4}{-y+8}.$$

Ainsi, y est un point fixe de $g \circ g$ si et seulement si $\frac{5y-4}{-y+8} = y$, c'est-à-dire $y^2 - 3y - 4 = 0$. Ainsi, les points fixes de $g \circ g$ sont -1 et 4.

La suite (v_{2n+1}) est croissante, et majorée par 2. Elle est donc convergente. Elle converge donc vers un point fixe de $g \circ g$ (car cette fonction est continue) ou un bord du domaine. Comme (v_{2n+1}) est à valeurs dans $]-\infty, 2[$, le seul point fixe possible est -1, et le seul bord possible est 2^-, ce qui n'est pas possible, car sinon, $f(v_{2n+1}) \to -\infty$, puis $f \circ f(v_{2n+1}) \to 1$, donc $v_{2n+3} \to 1$, ce qui entre en contradition avec $v_{2n+1} \to 2$.

Ainsi, $\lim v_{2n+1} = -1$.

En appliquant la fonction f continue en -1,

$$\lim f(v_{2n+1}) = f(-1) = -1, \qquad \text{donc:} \qquad \lim v_{2n+2} = -1.$$

Ainsi, $\lim v_{2n+1} = \lim v_{2n} = -1$, donc, par un argument classique, (v_n) admet une limite, égale à -1.

2. **Convergence de** (u_n) On suppose dans toute cette question que $a \notin \{v_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, la suite (u_n) est bien définie.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel x vérifie l'équation $f(x) = x$ si et seulement si $g \circ f(x) = g(x)$ (car g est bijective), donc si et seulement si $x = g(x)$. Ainsi, f et g ont les mêmes points fixes, donc les points fixes de g sont -1 et 4.

De même, les points fixes de $f \circ f$ sont les points fixes de $g \circ g$, à savoir -1 et 4 également.

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, en tant que fraction rationnelle, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = -\frac{6}{(x-1)^2} < 0.$$

Ainsi, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	2

Ces variations indiquent que $f(]1, +\infty[) \subset]2, +\infty[\subset]1, +\infty[$, donc $]1, +\infty[$ est un intervalle stable par f.

(c) Supposons $a \in]1, +\infty[$. Par un argument similaire à celui utilisé lors de l'étude de (v_n), la décroissance de f sur l'intervalle stable $]1, +\infty[$ amène la monotonie de (u_{2n}) et (u_{2n+1}), dès lors que $a \in]1, +\infty[$. On passe de l'une à l'autre en appluquant f décroissante, donc l'une est croissante et l'autre est décroissante. Celle qui décroit est minorée par 1, donc elle converge. Puisque la relation de récurrence satisfaite par cette suite est donnée par la fonction $f \circ f$, qui est continue sur son domaine, la convergence se fait vers l'unique point fixe possible 4, ou vers un bord, le seul possible étant ici 1. Comme plus haut, cette dernière possibilité n'est pas possible (appliquer deux fois f et regarder la limite alors obtenue) donc cette suite tend vers 4, donc la deuxième suite, obtenue en appliquant f (continue) à la première, tend vers $f(4) = 4$.

Par conséquent, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite 4, donc (u_n) converge vers 4.

(d) Supposons $a \in]-\infty, -5[$. On a $f(-5) = 1$, donc, f étant strictement décroissante sur $]-\infty, -5[$, $f(a) > 1$, donc $u_1 > 1$, et on est ramené à l'étude précédente. Ainsi, (u_n) admet une limite, égale à 4.

(e) Supposons $a \in]\frac{1}{7}, 1[$. De même, $f(\frac{1}{7}) = -5$, et f est strictement décroissante sur $]\frac{1}{7}, 1[$, donc $f(a) < -5$, donc $u_1 \in]-\infty, 5[$ et on est ramené à l'étude de la question précédente (on aura alors $u_2 \in]1, +\infty[$)

Par conséquent, dans ce cas aussi, (u_n) converge vers 4.

(f) Supposons $a \in]-5, \frac{1}{7}[$, $a \neq -1$, et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-5, \frac{1}{7}[$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f \circ f(x) - x = \frac{8x+4}{x+5} - x = \frac{-x^2+3x+4}{x+5} = \frac{-(x+1)(x-4)}{x+5}.$$

Ainsi, $f \circ f(x) - x$ est négatif sur $]-5, -1[$ et positif sur $]-1\frac{1}{7}[$.

- Si $a \in]-5, -1[$, montrons que sous les hypothèses données, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à valeurs dans $]-5, -1[$. Nous raisonnons par récurrence :
Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $-1 > u_0 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_{2n} > -5$..
La propriété $\mathcal{P}(0)$ est satisfaite par hypothèse initiale sur a
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Alors, la fonction $f \circ f - \mathrm{id}$ étant négative sur $]-5, -1[$,

$$f \circ f(u_{2n}) - u_{2n} \leqslant 0 \qquad \text{soit:} \qquad u_{2n+2} \leqslant u_{2n}.$$

Puisque par hypothèse, la suite (u_n) prend ses valeurs dans $]-5, \frac{1}{7}[$, on a aussi $u_{2n+2} > -5$. Ainsi, on obtient :

$$-1 > u_0 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_{2n} \geqslant u_{2n+2} > -5,$$

ce qui correspond bien à la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.
Ainsi, la suite (u_{2n}) est décroissante et à valeurs dans $]-5, -1[$.
En particulier, elle est décroissante et minorée, donc elle converge. Sa convergence se fait vers un point fixe de $f \circ f$, ou vers un bord de son domaine. Comme (u_{2n}) ne peut pas tendre vers -1 (à cause de ses variations), ni vers 4, sa seule limite possible est la valeur -5 (bord du domaine de $f \circ f$. Or,

$$\lim_{x \to -5^+} f \circ f(x) = \lim_{x \to -5^+} \frac{8x+4}{x+5} = -\infty,$$

donc, si $\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = -5^+$, on obtiendrait $\lim_{n \to +\infty} u_{2n+2} = -\infty$, ce qui amène une contradiction.

- Si $a \in]-1, \frac{1}{7}[$, on montre de la même manière que (u_{2n}) est croissante, et à valeurs dans $]-1, \frac{1}{7}[$, donc convergente, vers -1, 4 ou -5, ce qui n'est pas possible du fait de ses variations.

Ainsi, l'hypothèse stipulant que (u_n) prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $]-5, \frac{1}{7}[$ amène une contradiction. On en déduit qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} \notin]-5, \frac{1}{7}[$. Comme on a supposé que a n'est pas égal à une valeur de v_n (donc en particulier, $a \neq 1, -5, \frac{1}{7}$), on est ramené, à partir du rang n_0, à une des situations décrites dans les questions (c), (d) et (e). Par conséquent, (u_n) converge vers 4.

(g) Nous avons donc montré que
- pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ différent de -1, (u_n) est bien défini et converge vers 4
- si $a = -1$, comme il s'agit d'un point fixe de f, (u_n) est constante égale à -1, donc converge vers -1.
- si $a \in \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors (u_n) n'est pas définie pour les grandes valeurs de n.

3. **Étude de la vitesse de convergence de** (u_n) Dans cette question, on pourra admettre le résultat suivant (moyenne de Cesaro) : si une suite (a_n) admet une limite ℓ (finie ou infinie) alors la suite $\left(\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.

(a) L'énoncé n'est pas tout à fait exact. Il faut rajouter l'hypothèse $a > 1$ et $a \neq 4$. Avec l'hypothèse supplémentaire sur a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ et $u_n \neq 4$. Sous cette hypothèse, étant donné $k \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle fermé dont les bornes sont u_k et 4 est entièrement compris dans le domaine de définition de f. Comme f est dérivable sur son domaine de définition, on peut utiliser le théorème des accroissements finis entre 4 et u_k : il existe un réel $c_k \in]\min(4, u_k), \max(4, u_k)[$ tel que

$$f(u_k) - f(4) = f'(c_k)(u_k - 4) \qquad \text{soit:} \qquad u_k - 4 = f'(c_k)(u_k - 4) = f'(c_k)(f(u_{k-1}) - 4)$$

En itérant cette relation en cascade, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(u_n) - 4 = f'(c_n)f'(c_{n-1}) \cdots f'(c_1)(f(u_0) - 4).$$

On obtient bien

$$f(u_n) - 4 = \prod_{k=1}^{n} f'(c_k)(f(u_0) - 4).$$

Comme (u_n) tend vers 4, il en est de même de $\min(4, u_n)$ et de $\max(4, u_n)$. Ainsi, comme on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \min(4, u_n) \leqslant c_n \leqslant \max(4, u_n),$$

le théorème d'encadrement amène la convergence de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 4$.

(b) On a $f'(4) = -\frac{2}{3}$, et f' est continue en $-\frac{2}{3}$. Donc $|f'(c_n)| \to \frac{2}{3}$, et par continuité du ln, $\ln|f'(c_n)| \to \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.
Par conséquent, d'après le théorème de Cesaro admis dans l'énoncé,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln|f'(c_k)| = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

(c) On a donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln|f'(c_k)| = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + o(1) \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{k=1}^{n} \ln|f'(c_k)| = n\ln\left(\frac{2}{3}\right) + o(n).$$

Il existe donc une suite (x_n), vérifian $w_n = o(n)$, telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln|f'(c_k)| = n\ln\left(\frac{2}{3}\right) + x_n,$$

et donc, en appliquant l'exponentielle :

$$\prod_{k=1}^{n} |f'(c_k)| = \mathrm{e}^{n\ln\left(\frac{2}{3}\right)+x_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mathrm{e}^{x_n}.$$

On déduit alors de la question 3(a) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - 4| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mathrm{e}^{x_n}(f(u_0) - 4).$$

Puisqu'on a supposé $a \neq 4$, $u_0 - 4 \neq 0$, et on peut donc poser $w_n = x_n + \ln(a-4) = o(n)$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - 4| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mathrm{e}^{w_n}.$$

(d) Si $r = 0$, le résultat est trivial car $r^n = 0$.
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\frac{|u_n - 4|}{r^n} = \mathrm{e}^{n\left(\ln\frac{2}{3} - \ln r\right) + w_n}.$$

- Si $r > \frac{2}{3}$, alors $\ln\frac{2}{3} - \ln r < 0$, et puisque $w_n = o(n)$,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\ln\frac{2}{3} - \ln r\right) + w_n = -\infty \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{|u_n - 4|}{r^n} = 0.$$

  Ainsi, $|f(u_n) - 4| = o(r^n)$
- Si $r < \frac{2}{3}$, alors $\ln\frac{2}{3} - \ln r > 0$, et puisque $w_n = o(n)$,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\ln\frac{2}{3} - \ln r\right) + w_n = +\infty \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{|f(u_n) - 4|}{r^n} = +\infty.$$

  Ainsi, $r^n = o(|f(u_n) - 4|)$.

(e) Une question supplémentaire pour régler le cas où on n'a plus l'hypothèse sur a.
- Si $a = 4$ ou $a = -1$, la question ne'st pas intéressante, car $(|f(u_n) - 4|)$ est constante.
- Si $a < 1$, $a \neq -1$, et a non égal à une des valeurs de v_n (afin que (u_n) soit bien définie), alors, d'après ce qui précède, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > 1$. En posant $z_n = u_{n_0+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on est ramené pour la suite (z_n) à la situation précédente :

∗ Si $r > \frac{2}{3}$,

$$|f(z_n) - 4| = o(r^n) \qquad \text{donc:} \qquad |f(u_n) - 4| = o(r^{n-n_0}) = \frac{1}{r^{n_0}} o(r^n) = o(r^n),$$

puisque $\frac{1}{r^{n_0}}$ est une constante.

∗ Si $r \in [0, \frac{2}{3}[$,

$$r^n = o(f(z_n) - 4) \qquad \text{donc:} \qquad r^{n-n_0} = o(f(u_n) - 4), \qquad \text{donc:} \qquad r^n = o(f(u_n) - 4),$$

puisque ^{n_0} est une constante.

4. **Programmation**

Les cas où il n'existe pas d'entier k tel que $u_k > 1$ sont, d'après ce qui précède, le cas où $a = -1$ (suite constante), et les valeurs de a pour lesquelles (u_n) est non définie, c'est-à-dire pour lesquelles, il existe une valeur k telle que $u_k = 1$ (la valeur suivante ne pouvant alors pas être calculée). On obtient alors

```
begin program suite;

var u:real; n:integer;

begin
  writeln('a?'); readln(u);   {initialisation de la suite}
  if u=-1 then n:=-1
  else
    n:=0;                     {initialisation du compteur d'indice}
    begin
      while u < 1 do          {on s'arrête si u_n=1 ou u_n>1}
        begin
          n:=n+1
          u:= (2*u+4)/(u-1);  {calcul de la valeur suivante de u_n}
        end;
                              {pourquoi s'est-on arrêté? (u_n=1 ou u_n>1?)}
     if u=1 then n:=-1        {si c'est car u_n=1, par convention il faut renvoyer -1}
    end;
  readln('Le rang recherché est',n);
end.
```

Correction de l'exercice 2 – (HEC 2010)

1. CNS : une suite réelle décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée.
2. (a) Le système $MX = aX$ fournit :

$$(1-a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad x_i = a x_{i-1}.$$

Si $x_n = 0$, on obtient facilement $X = 0$, et si $x_n \neq 0$, $x_i = a^{n-i} x_n$, et par substitution dans la première équation, $(-a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1)x_n = 0$, et cela n'est possible que si $-a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1 = 0$. Ainsi, le système admet une solution non triviale si et seulement si λ est racine du polynôme $X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - 1$.

(b) La fin de la résolution du système précédente amène alors sans difficulté

$$E_a = \mathbb{R} \begin{pmatrix} a^{n-1} \\ \vdots \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) $P_k(1) \neq 0$, donc

$$P_k(x) = 0 \iff x^k = 1 + x + \cdots + x^{k-1} = \frac{1 - x^k}{1 - x} \iff x^{k+1} - 2x^k + 1 = f(x)$$

On a pour tout x, $f'(x) = x^{k-1}((k+1)x - 2k)$, donc il existe $\beta > 1$ tel que f est décroissante sur $]1, \beta[$, et croissante sur $]\beta, +\infty[$. Comme $f(1) < 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit l'existence et l'unicité de a_k par le théorème de la bijection sur $]\beta, +\infty[$.

(b) $P_{k+1}(a_k) = P_{k+1}(a_k) - P_k(a_k) = a_k^{k+1} - 2a_k^k = -1$ (d'après l'équation trouvée dans la question précédente). Ainsi, $P_{k+1}(a_k) < 0$, donc, d'après le signe de P_{k+1} (négatif sur $]1, \alpha_{k+1}[$ et positif sur $]a_k, +\infty[$), $a_k < a_{k+1}$. Donc la suite (a_k) est croissante. Par ailleurs, la fonction f de la question précédente vérifie $f(2) = 1$, de même signe que la limite en $+\infty$. Par unicité de la solution de l'equation $f(x) = 0$ sur $]1, +\infty[$, il vient alors $a_k < 2$ (sinon on applique 2 fois le TVI entre 2 et a_k, et entre a_k et $+\infty$ et on obtient une contradiction).

Ainsi, (a_k) est croissante, majorée par 2. Elle converge donc.

En revenant à l'équation de la question précédente, que l'on divise par a_k^k, il vient :

$$0 \leqslant 2 - a_k = \frac{1}{a_k^k} \leqslant \frac{1}{a_2^k},$$

par croissance et donc, puisque $a_2 > 1$, on a convergence de (a_k) vers 2, par le théorème d'encadrement.

4. (a) Soit $k = 2p$. On voit facilement que f' est de signe constant positif sur $\mathbb{R}_-$, donc f est strictement croissante, de limite $-\infty$ en $-\infty$, et $f(0) = 1$. D'où l'existence et l'unicité de b_p par le théorème de la bijection.

(b) $P_{2p+2}(b_p) - P_{2p}(b_p) = b_p^{2p+2} - b_p^{2p+1} - 2b_p^{2p} = b_p^{2p}(b_p^2 - b_p - 2)$.

Le polynôme $X^2 - X - 2$ admet deux racines -1 et 2, et de plus, $P_{2p}(-1) = 1$, de même signe que la limite en $-\infty$. Par le même raisonnement que précédemment, on en déduit que $b_p \in]-1, 0[$, donc se situe entre les 2 racines du polynôme. Donc

$$P_{2p+2}(b_p) = P_{2p+2}(b_p) - P_{2p}(b_p) < 0.$$

Comme P_{2p+2} est (sur $\mathbb{R}_-$) positive à gauche de b_{p+1} et négative à droite, $b_p > b_{p+1}$.

Ainsi, (b_p) est décroissante, minorée par -1, donc converge.

Soit $\ell = \lim b_p$. Si $\ell \neq -1$, alors $-1 < \ell < 0$, et comme $b_p > \ell$, on en déduit que $\lim b_p^{2p} = \lim b_p^{2p+1} = 0$. Ainsi, on obtient une contradiction en passant à la limite dans l'équation $b_p^{2p+1} - 2b_p^{2p} + 1 = 0$.

Donc $\ell = -1$.

(c) On a alors $b_p^{2p}(b_p - 2) = -1$, donc $b_p^{2p} = -\frac{1}{b_p - 2} \longrightarrow \frac{1}{3}$.

Ainsi, $2p \ln |b_p| \longrightarrow \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$, et comme $|b_p| \to 1$, $\ln |b_p| \underset{+\infty}{\sim} |b_p| - 1 = -b_p - 1$. On obtient donc

$$b_p + 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln 3}{2p}.$$

5. (a)
- Soit $Q(X) = X^{n+1} - 2X^n + 1$. Les valeurs propres de M_n sont les racines de Q différentes de 1. Le polynôme Q' admet une unique racine non nulle, égale à $2 - \frac{2}{n+1} > 1$.
  Donc Q est monotone sur $[0, 1]$, et $Q(0) = 1$, $Q(1) = 0$. Donc Q n'admet pas de racine sur $[0, 1[$.
- D'après l'étude de (a_k), Q possède une seule racine sur $]1, +\infty[$
- Si n est pair, Q possède une seule racine sur $\mathbb{R}_-$. Si n est impair, alors Q est toujours strictement positif sur $\mathbb{R}_-$, donc n'admet pas de racine

Ainsi, Q admet au plus 2 racines différentes de 1, donc M_n admet au plus 2 valeurs propres Comme d'après ce qui précède, les espaces propres sont de dimension 1, M_n ne peut pas être diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sauf si $n = 2$. Dans ce dernier cas a_2 et b_1 sont deux valeurs propres distinctes : la matrice étant d'ordre 2, elle est diagonalisable.

(b) Q_n' admet comme uniques racines 0 et $\frac{2n}{n+1}$. Or, 0 n'est pas racine de Q_n et

$$Q_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) = -\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{2}{n+1} + 1.$$

Ainsi, $Q_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) = 0$ si et seulement si

$$2^{n+1} n^n = (n+1)^{n+1}.$$

Or, si $n \geqslant 2$, alors n et $n+1$ n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1, car un tel diviseur serait aussi un diviseur de leur différence. Ainsi, n est premier avec $n+1$, et donc avec $(n+1)^{n+1}$, donc n ne divise pas $(n+1)^{n+1}$, ce qui contredit l'équation précédente. Ainsi, on ne peut pas avoir $Q_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) = 0$.

Par conséquent, Q_n n'a que des racines simples (aucune de ses racines n'est racine de Q_n'). Ainsi, Q_n admet dans $\mathbb{C}$ $n+1$ racines distinctes, dont 1, donc admet n racines 2 à 2 distinctes différentes de 1. Ainsi, M_n admet n valeurs propres 2 à 2 distinctes sur $\mathbb{C}$, donc M_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, pour toute valeur de n.

Correction du problème –

Partie I – Probabilité d'obtenir une séquence donnée dans une suite infinie.

1. A : la séquence apparaît au moins à une position i quelconque, donc la séquence apparaît au moins une fois dans la suite infinie de caractères.
2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i = E(i, a_1) \cap E(i+1, a_2) \cap \cdots \cap E(i+m-1, a_m)$.
3. Puisque $k \geqslant m$, il n'y a pas de recoupement entre la séquence apparaissant à la position i et la séquence apparaissant à la position $i+k$. Considérons alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $(a_1, \dots, a_m) = (x_i, \dots, x_{i+m-1})$ et $(a_1, \dots, a_m) = (x_{i+k}, \dots, x_{i+m+k-1})$. Alors, la famille $(E(n, x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant une famille d'événements mutuellement indépendants, en prenant $J_1 = \{i, \dots, i+m-1\}$, $J_2 = \{i+k, \dots, i+m+k-1\}$ et $J_3 = J_1 \cup J_2$ dans la définition de l'indépendance mutuelle, on obtient, puisque l'union définissant J_3 est disjointe :

$$
\begin{aligned}
P(A_i \cap A_{i+k}) &= P\left(\bigcap_{j\in J_1} E(j, x_j) \cap \bigcap_{j\in J_2} E(j, x_j)\right) = P\left(\bigcap_{j\in J_3} E(j, x_j)\right) = \prod_{j\in J_3} P(E(j, x_j)) \\
&= \prod_{j\in J_1} P(E(j, x_j)) \cdot \prod_{j\in J_2} P(E(j, x_j)) = P\left(\bigcap_{j\in J_1} E(j, x_j)\right) \cdot P\left(\bigcap_{j\in J_2} E(j, x_j)\right) = P(A_i) \cdot P(A_{i+k}).
\end{aligned}
$$

4. Les $E(i, x_i)$ étant mutuellement indépendants, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$
\begin{aligned}
P(A_n) &= P(E(n, a_1) \cap E(n+1, a_2) \cap \cdots \cap E(n+m-1, a_m)) \\
&= P(E(n, a_1))P(E(n+1, a_2)) \cdots P(E(n+m-1, a_m)) \\
&= p_{a_1} \cdots p_{a_m} = p.
\end{aligned}
$$

   Cette quantité est indépendante de n. De plus, chacune des probabilités p_x étant non nulle, le produit fini définissant p est également non nul.

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3, la famille $(A_{1+nm})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est mutuellement indépendante, donc, d'après un résultat du cours, la famille $(\overline{A_{1+nm}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi. Ainsi :

$$
P\left(\bigcap_{n=1}^{N} \overline{A_{1+nm}}\right) = \prod_{n=1}^{N} P(\overline{A_{1+nm}}) = \prod_{n=1}^{N} (1 - P(A_{1+nm})) = (1-p)^N.
$$

   Par conséquent,

$$
P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_{1+nm}\right) = P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{N} \overline{A_{1+nm}}}\right) = 1 - (1-p)^n,
$$

   puis, d'après le théorème des limites monotones, puisque $\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_{1+nm}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements,

$$
P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{1+nm}\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_{1+nm}\right) = \lim_{N\to+\infty} (1 - (1-p)^n) = 1.
$$

   La dernière égalité provient du fait que $p \neq 0$, donc $0 \leqslant 1 - p < 1$.

   Enfin, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{1+nm} \subset A$, donc $P(A) \geqslant 1$, donc $P(A) = 1$. Ainsi, la séquence $(a_1 \dots a_m)$ apparaît presque sûrement dans la suite aléatoire infinie.

Partie II – Une relation de récurrence satisfaite par $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$, donc $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)$, donc $v_n \leqslant v_{n+1}$.
2. La notion de « superposable en partie » signifie qu'il existe un préfixe du mot (non égal au mot tout entier) qui est également suffixe. L'entier i correspond au nombre de lettre avant le début du suffixe.
   (a) ENTENDENT : OUI, avec le préfixe ENT ($i = 6$)

(b) KAYAK : OUI, avec le préfixe K ($i = 4$)

(c) FINI : NON.

3. Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Si A_i et A_{i+k} ne sont pas incompatibles, alors

$$\varnothing \neq A_i \cap A_{i+k} = E(i, a_1) \cap \cdots \cap E(i+m-1, a_m) \cap E(i+k, a_1) \cap \cdots \cap E(i+k+m-1, a_m).$$

En particulier, en regroupant les termes $E(i, -)$ correspondant à une même position, il faut que, pour tout $j \in [\![i+k, i+m-1]\!]$ (ensemble qui est non vide car $k \leqslant m-1$), $E(j, a_{j-i+1}) \cap E(j, a_{j-i-k+1}) \neq \varnothing$, ce qui impose $a_{j-i+1} = a_{j-i-k+1}$. En faisant un changement d'indice, pour tout $j \in [\![k+1, m]\!]$, $a_j = a_{j-k}$. Ainsi, $(a_1, \ldots, a_m)$ est superposable en partie, ce qui contredit les hypothèses.

4. Soit $n \geqslant m$. Par la formule du crible :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &= v_n + p - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) = v_n + p - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-m+1} (A_i \cap A_{n+1})\right), \end{aligned}$$

car si $i \in [\![n-m+2, n]\!]$, A_i et A_{n+1} sont incompatibles (question précédente), et donc $A_i \cap A_{n+1} = \varnothing$.

5. Soit $n \geqslant m$. L'union $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n-m+1} A_i$ ne dépend que des valeurs prises par les lettre de 1 à n, alors que A_{n+1} ne dépend que des lettres de $n+1$ à $n+m$. Comme les choix des différentes lettres sont mutuellement indépendants, on en déduit que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n-m+1} A_i$ et A_{n+1} sont indépendants.

On en déduit que $P\left(\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n-m+1} A_i\right) \cap A_{n+1})\right) = P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n-m+1} A_i\right) \cdot P(A_{n+1}) = p \cdot v_{n-m+1}$.
Ainsi, $v_{n+1} = v_n + p - pv_{n-m+1}$.

6. Soit $n \in [\![1, m]\!]$. Alors, $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles (question 3), et par conséquent, par additivité :

$$v_n = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) = np.$$

7. On remplace v_n par $1 - u_n$ dans le relation satisfaite par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\forall n \geqslant m, \quad 1 - u_{n+1} = 1 - u_n + p - p(1 - u_{n-m+1}), \qquad \text{d'où} \qquad \forall n \geqslant m \quad u_{n+1} = u_n - pu_{n-m+1}.$$

Les conditions initiales (qui doivent être au nombre de m puisqu'il s'agir d'une relation de récurrence d'ordre m) sont :

$$\forall n \in [\![1, m]\!], \quad u_n = 1 - np.$$

PARTIE III – Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. On a montré que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant 1$, donc $u_n \geqslant 0$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée : elle converge.
On obtient sa limite ℓ en passant à la limite dans la relation de récurrence : $\ell = \ell - p\ell$, d'où $\ell = 0$.
Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$. Or, d'après le théorème des limites monotones, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = P(A)$. On retrouve bien $P(A) = 1$.

2. On rappelle que pour tous événements A et B, $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$. C'est une conséquence immédiate du crible.
Soit, pour tout n dans $[\![m, +\infty[\![$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leqslant (1-p)^{n-m}(1-mp)$.
Pour $n = m$, on a $u_m = 1 - pm = (1-p)^{m-m}(1-mp)$. D'où $\mathcal{P}(m)$.
Soit $n \geqslant m$ tel que $\mathcal{P}(n)$ Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - pu_{n-m+1} \leqslant u_n - pu_n \qquad \text{(décroissance)} \\ &\leqslant (1-p)(1-p)^{n-m}(1-mp) = (1-p)^{n+1-m}(1-mp) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(m)$ est vraie, et pour tout n dans $[\![m,+\infty[\![$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $[\![m,+\infty[\![$.

On retrouve ainsi la valeur de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$ et est majoré par la suite $((1-p)^{n+1-m}(1-mp))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers 0 (suite géométrique de raison $1-p \in [0,1[$). Le théorème des gendarmes permet de conclure.

3. Étude du cas particulier $m=2$, $p=\frac{4}{25}$.

   La relation de récurrence est : $\forall n \geqslant 2$, $u_{n+1} = u_n - \frac{4}{25}u_{n-1}$. Le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence linéaire est $P(X) = X^2 - X + \frac{4}{25}$. Ses racines sont $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$. Ainsi, d'après un théorème du cours, il existe deux réels, λ et μ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\lambda}{5^n} + \frac{\mu 4^n}{5^n},$$
   On trouve λ et μ à l'aide des conditions initiales déterminées en II-7 :
$$u_1 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \qquad \text{et} \qquad u_2 = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25}.$$
   Cela donne un système :
$$\begin{cases} \frac{1}{5}\cdot\lambda + \ \frac{4}{5}\cdot\mu = \frac{21}{25} \\ \\ \frac{1}{25}\cdot\lambda + \frac{16}{25}\cdot\mu = \frac{17}{25} \end{cases}$$
   La résolution de ce système donne : $\lambda = -\frac{1}{15}$ et $\mu = \frac{16}{15}$. Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = -\frac{1}{15}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{16}{15}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

4. (a) La relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est maintenant : $\forall n \geqslant 3, \quad u_{n+1} = u_n - pu_{n-2}$, avec $p < \frac{4}{27}$.

   Ainsi, on peut écrire, pour tout $n \geqslant 3$,
$$U_{n-1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n - pu_{n-2} \\ u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}.$$
   Ainsi, en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient bien $U_{n-1} = AU_{n-2}$. Par itération, on obtient alors facilement $U_n = A^{n-1}U_1$.

   (b) Un réel λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas valeur inversible. Déterminons-en une réduite de Gauss :
$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -p \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 1-\lambda & 0 & -p \end{pmatrix}$$
$$\underset{\longrightarrow}{L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda(1-\lambda) & -p \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{L_3 \leftarrow L_3 - \lambda(1-\lambda)L_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -p+\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix} = A_\lambda.$$
   Ainsi, λ est valeur propre de A si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^3 - \lambda^2 + p = 0$.

   (c) Soit f la fonction $x \mapsto x^3 - x^2 + p$. C'est une fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $x \mapsto f'(x) = 3x^2 - 2x$, et s'annule en 0 et en $\frac{2}{3}$. Par conséquent, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	p	$\searrow$	$p-\frac{4}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Par conséquent :

- Puisque $f(0) = p > 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, et puisque f est continue sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, f admet une racine λ_1 sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. De plus f est strictement croissante, et donc, cette racine est unique d'après le théorème de la bijection. Enfin, puisque $f(-1) = p - 2 < 0$, on en déduit que $\lambda_1 \in]-1, 0[$.
- De même, il existe une unique racine λ_2 dans $]0, \frac{2}{3}[$, car, d'après l'hypothèse, $p \leqslant \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$, et une unique racine λ_3 dans $]\frac{2}{3}, 1[$, donc $f(\frac{2}{3}) < 0$.
- De même, f admet une unique racine λ_3 sur l'intervalle $]\frac{2}{3}, +\infty[$, et puisque $f(1) = p > 0$, cette racine est dans $]\frac{2}{3}, 1[$.

Ainsi, f étant une fonction polynomiale de degré 3 (ne pouvant donc admettre davantage de racines), on les a toutes, et donc, les valeurs propres de A sont au nombre de 3, et vérifient

$$-1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \frac{2}{3} < \lambda_3 < 1.$$

(d) Puisque A admet 3 valeurs propres distinctes et est d'ordre 3, elle est diagonalisable. D'après la relation de diagonlisation (c'est-à-dire la formule de changement de base de la base canonique à une base de vecteurs propres), il existe une matrice diagonale D (dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3), et une matrice inversible Q (dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs propres associés) telles que $A = QDQ^{-1}$.
On a alors

$$A^{n-1} = QDQ^{-1}QDQ^{-1} \cdots QDQ^{-1}.$$

Les produits $Q^{-1}Q$ s'insérant entre les termes D étant égaux à l'identité, il reste $A^{n-1} = QD^{n-1}Q^{-1}$.

(e) Puisque $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, on a $D^{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{n-1} \end{pmatrix}$. Les coefficients de Q étant indépendants de n, les coefficients du produit QD^{n-1} sont des combinaisons linéaires des coefficients de D, donc des termes λ_1^{n-1}, λ_2^{n-1} et λ_3^{n-1}, les coefficients étant indépendants de n. Cela reste vrai en multipliant à droite par Q^{-1}, puis par la colonne U_1.
Ainsi, il existe des coefficients α, β et γ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \alpha\lambda_1^{n-1} + \beta\lambda_2^{n-1} + \gamma\lambda_3^{n-1}.$$

(f) On suppose maintenant $p = \frac{1}{8} = \frac{4}{32} < \frac{4}{27}$.
Un réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda^3 - \lambda^2 + \frac{1}{8} = 0$. On constate que le polynôme $X^3 - X^2 + \frac{1}{8}$ admet une racine évidente, égale à $\frac{1}{2}$. Ainsi, on peut le factoriser :

$$X^3 - X^2 + \frac{1}{8} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right).$$

Le discriminant du second terme de la factorisation est $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, donc les racines sont :

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Ainsi, les 3 valeurs propres de A sont :

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{5}.$$

On revient à la matrice A_λ pour déterminer chacun des 3 espaces propres, égaux aux noyaux des 3 matrices A_λ, pour les trois valeurs λ correspondant aux valeurs propres. Puisqu'on a un nombre maximal de valeurs propres, les espaces-propres sont de dimension 1, donc les noyaux des A_l considérés sont de dimension 1, donc engendrés par n'importe lequel de leur vecteur non nul.

- $A_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc on a une relation sur les colonnes de cette matrice :

$$0 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}C_1 + C_2 + \frac{4}{1-\sqrt{5}}C_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}C_1 + C_2 - (1+\sqrt{5})C_3$$

Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ 1 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(A_{\lambda_1})$ qui est de dimension 1, donc

$$E_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(A_{\lambda_1}) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ 1 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

- $A_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ses colonnes vérifient $0 = C_1 + 2C_2 + 4C_4$, donc, de même $E_{\lambda_2} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- $A_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc ses colonnes vérifient

$$0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} C_1 + C_2 + \frac{4}{1+\sqrt{5}} C_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} C_1 + C_2 + (\sqrt{5}-1) C_3$$

Ainsi, $E_{\lambda_3} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ 1 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Il suffit alors de poser

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix}. \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{4} & 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{5}+1 & 4 & \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}.$$

5. FINI est bien non superposable en partie. Pour cet exemple, $m = 4$ et $p = p_F p_N p_I^2$. La relation de récurrence est :

$$\forall n \geqslant 4, \quad u_{n+1} = u_n - p u_{n-3}.$$

(a)
```
program dm7_1;
uses crt;
var p,probaf,probai,proban:real;
var u,v,w,x,y:real;
var n,i:integer;

begin
  clrscr;
  write('Probabilité de sortie de F: ');   {entrée des données par l'utilisateur}
  readln(probaf);
  write('Probabilité de sortie de I: ');
  readln(probai);
  write('Probabilité de sortie de N: ');
  readln(proban);
  if probaf<0 or probai<0 or proban<0 or (probaf+probai+proban>1) then
    writeln('Données incohérentes')
  else
    begin
      p:=probaf*probai*proban*probai;      {calcul de p}
      u:=1-p;                              {initialisation}
      v:=1-2*p;
      w:=1-3*p;
      x:=1-4*p;
      n:=4;                                {initialisation du nombre de lettre}
        while (1-x) <= 0.99999 do
          begin
            n:=n+1                         {incrémentation du compteur}
```

```
            y:=w-p*u;                         {nouvelle valeur}
            u:=v;                             {actualisation des variables}
            v:=w;
            w:=x;
            x:=y;
          end;
    write('Pour avoir une probabilité supérieure à 0.99999 d'avoir le mot FINI,');
    write{' il faut un mot de longueur ',n+3);
    end;
end.
```

Remarque : puisque $x \geqslant 0$, les données du problème imposent que $p \leqslant \frac{1}{4}$ (cela vient de la cohérence des données). Donc la probabilité 0.99999 ne peut pas être atteinte dès les rangs 1, 2 ou 3. En revanche, elle peut être atteinte au rang 4. C'est pour cela qu'il faut faire le test avant d'effectuer la boucle, d'où la structure `while ... do ...` plutôt que `repeat ... until ...`.

(b) On suppose que $p < \frac{3^3}{4^4}$. On pose $R(X) = X^4 - X^3 + p$.

i. On fait une étude de la fonction $x \mapsto R(x) = x^4 - x^3 + p$. Sa dérivée est $x \mapsto R'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$. Ainsi, R' s'annule en 0 et en $\frac{3}{4}$. De plus, $R\left(\frac{3}{4}\right) = p + \frac{3^4}{4^4} - \frac{3^3}{4^3} = p + \frac{3^3(3-4)}{4^4} = p - \frac{3^3}{4^4}$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	p	$\searrow$	$p - \frac{3^3}{4^4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, par le théorème de la bijection (R est continue), R n'a pas de racine dans $\mathbb{R}_-$, a exactement 1 racine dans $]0, \frac{3}{4}[$, car $R\left(\frac{3}{4}\right) = p - \frac{3^3}{4^4} < 0$, et a exactement une racine dans $]\frac{3}{4}, +\infty[$, et plus précisément dans $]\frac{3}{4}, 1[$, puisque $R(1) = p > 0$. Ainsi, R admet exactement deux racines, et toutes les deux sont dans l'intervalle $]0,1[$.

ii. Soit μ_1 et μ_2 les deux racines réelles trouvées dans la question précédente. Alors on peut factoriser $R(X) = (X-\mu_1)(X-\mu_2)Q(X)$, où Q est un polynôme à coefficients réels de degré 2. Ce polynôme n'admet pas de racine réelle, puisque R admet exactement deux racines réelles. Ainsi, ses deux racines sont complexes. La résolution des équations du second degré nous montre qu'alors, puisque les coefficients sont tous réels, les deux racines complexes sont conjuguées.

iii. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence dont le polynôme caractéristique est R, qui admet 4 racines distinctes (dans $\mathbb{C}$) : μ_1, μ_2, δ et $\overline{\delta}$. Par conséquent, il existe un unique quadruplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{C}^4$ tel que u_n s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \alpha_1 \mu_1^{n-1} + \alpha_2 \mu_2^{n-1} + \alpha_3 \delta^{n-1} + \alpha_4 \overline{\delta}^{n-1}.$$

iv. Cela provient de l'unicité des coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, puisque par passage au conjugué, on obtient une relation similaire avec les coefficients $(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_4}, \overline{\alpha_3})$. L'identification qu'on peut faire alors (provenant le l'unicité) fournit le résultat.

v. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, et $(\alpha_1\mu_1^{n-1} + \alpha_2\mu_2^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi, puisque $\mu_1, \mu_2 \in]0,1[$. Ainsi, $(\alpha_3\delta^{n-1} + \overline{\alpha_3\delta^{n-1}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Or, cette expression est égale à $2\mathrm{Re}(\alpha_3\delta^{n-1}) = 2r^n|\alpha_3|\cos(\theta(n-1))$, où $\delta = re^{\theta}$. Cette expression n'admet pas de limite si $r \geqslant 1$. Ainsi, $r < 1$, c'est-à-dire $|\delta| < 1$.