 Samedi 15/10/2011

DS n° 2 : Intégrales impropres

Correction du problème 1 – (EDHEC 2007)

Partie I – Les tirages se font avec remise de la boule tirée

1. Appelons pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, G_ℓ l'événement « l'un des joueur remporte la partie lors du ℓ-ième tirage ».
Étant donné que le joueur A joue toutes les parties $3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, que B joue toutes les parties $3k+2$, $k \in \mathbb{N}$ et que C joue toutes les parties $3k+3$, $k \in \mathbb{N}$, on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad G_{3k+1} = A_{3k+1}, \qquad G_{3k+2} = A_{3k+2} \qquad \text{et} \qquad G_{3k+3} = A_{3k+3}.$$
Ces événements G_k ne sont pas complètement indispensables à la rédaction, mais permettent de simplifier un peu les expressions ensemblistes lors des calculs, du fait d'une plus grande homogénéité des notations.
À condition de supposer que l'on prolonge indéfiniment l'expérience (même après la victoire d'un des joueurs), les événements G_k sont mutuellement indépendants (car un tirage donné ne modifie pas le contenu de l'urne, puisqu'on procède avec remise de la boule tirée, et n'influe donc pas sur les tirages suivants), et à chaque étape, la réalisation de G_k est une épreuve de Bernoulli de paramètre constant égal à $\frac{1}{n}$ (équiprobabilité du tirage dans l'urne).
Ainsi, le temps d'attente de la première réalisation d'un événement G_k est une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. L'événement A_{3k+1} est réalisé si et seulement si A tire la boule blanche lors du $3k+1$-ième tirage, et qu'aucun des joueurs ne tire la boule blanche lors des tirages précédents.
Ainsi :
$$A_{3k+1} = [X = 3k+1],$$
et, puisque X suit une loi géométrique :
$$\boxed{P(A_{3k+1}) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k}}.$$
Ce résultat peut évidemment être retrouvé directement, sans référence à la loi géométrique, en écrivant
$$A_{3k+1} = \bigcap_{\ell=1}^{3k} \overline{G_\ell} \cap G_{3k+1}.$$
On raisonne de même pour B_{3k+2} et C_{3k+3} :
$$\boxed{P(B_{3k+2}) = P(X = 3k+2) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k+1}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{P(C_{3k+3}) = P(X = 3k+3) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k+2}}$$

2. Puisque A ne joue que les tirages $3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, l'événement A est réalisé si et seulement si l'un des événements A_{3k+1}, $k \in \mathbb{N}$, est réalisé. Ainsi :
$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{3k+1}.$$
Les événements A_{3k+1}, $k \in \mathbb{N}$ étant 2 à 2 incompatibles (le joueur A ne peut pas tirer pour la première fois la boule blanche lors de 2 tirages distincts !), et l'union étant constituée d'un nombre dénombrable d'événements, on obtient, par σ-additivité de la mesure de probabilité :
$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{3k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^3},$$
d'après la formule des sommes géométriques. Ainsi :
$$\boxed{P(A) = \frac{n^2}{n^3 - (n-1)^3}}.$$
De la même façon, on obtient :
$$P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_{3k+2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k+1} = \frac{n-1}{n} P(A),$$

d'où $\boxed{P(B) = \dfrac{n(n-1)}{n^3-(n-1)^3}}$.

En raisonnant encore de même :

$$P(C) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(C_{3k+3}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k+2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 P(A),$$

d'où $\boxed{P(C) = \dfrac{(n-1)^2}{n^3-(n-1)^3}}$.

Les égalités $P(B) = \frac{n-1}{n}P(A)$ et $P(C) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 P(A) = \frac{n-1}{n}P(B)$ amènent immédiatement $P(A) \geqslant P(B) \geqslant P(C)$, du fait de l'inégalité $0 \leqslant \frac{n-1}{n} < 1$ et du fait de la positivité des probabilités. L'énoncé est trop imprécis pour obtenir les inégalités strictes (notamment entre $P(B)$ et $P(C)$). En effet, ce n'est pas le cas si $n = 1$ (dans ce cas, A tire la boule blanche lors du premier tirage, puisqu'il n'y a qu'elle, et donc $P(A) = 1$, $P(B) = P(C) = 0$.)

En revanche, $\boxed{\text{si } n \geqslant 2,\ P(A) > P(B) > P(C)}$, puisque $P(A)$ et $\frac{n-1}{n}$ sont non nuls.

Ce résultat est bien sûr prévisible : si personne n'a gagné au bout de $3k$ tirages, les 3 joueurs ont la même chance de tirer la boule blanche lors des 3 tirages suivants, mais comme A joue en premier, A a plus de chance d'obtenir la boule blanche en premier !

Partie II – Les tirages se font sans remise de la boule tirée.

1. Je propose deux méthodes pour ce calcul
   - **Première méthode (la plus naturelle)**

   Soit k tel que $3k+3 \leqslant n$.

   L'événement A_{3k+1} est réalisé si et seulement si la boule blanche n'est pas tirée lors des $3k$ premiers tirages, et l'est au $3k+1$-ième tirage. Ainsi, comme on l'a écrit pour la question 1 :

$$A_{3k+1} = \bigcap_{\ell=1}^{3k} \overline{G_\ell} \cap G_{3k+1}.$$

   La différence par rapport à la situation précédente réside dans le fait que les événements G_k ne sont plus indépendants maintenant. Nous utilisons donc la formule des probabilités composées, l'événement $\bigcap_{\ell=1}^{3k}\overline{G_\ell}$ n'étant clairement pas quasi-impossible (puisque $3k+3 \leqslant n$, on n'a pas épuisé l'ensemble des boules noire au $3k$-ième tirage, donc à chaque tirage, on a possibilité, avec probabilité non nulle, de tirer une boule noire). On a alors :

$$P(A_{3k+1}) = P(\overline{G_1})P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2})\cdots P_{\overline{G_1}\cap\cdots\cap\overline{G_{3k-1}}}(\overline{G_{3k}})P_{\overline{G_1}\cap\cdots\cap\overline{G_{3k}}}(G_{3k+1}).$$

   Or, étant donné $\ell \in [\![1, 3k-1]\!]$, l'événement $\overline{G_\ell}$ est réalisé sachant que $\overline{G_1}\cap\cdots\cap\overline{G_{\ell-1}}$ l'est si et seulement si on tire lors du ℓ-ième tirage l'une des boules noires restantes, sachant qu'on en a tiré $\ell-1$ lors des $\ell-1$ premiers tirages : il reste donc à ce moment $n-\ell$ boules noires, sur un total de $n-\ell+1$ boules. Ainsi :

$$P_{\overline{G_1}\cap\cdots\cap\overline{G_{\ell-1}}}(\overline{G_\ell}) = \frac{n-\ell}{n-\ell+1}.$$

   De même, sachant que $\overline{G_1}\cap\cdots\cap\overline{G_{3k}}$ est réalisé, il reste, à l'issue du tirage $3k$, 1 boule blanche sur un total de $n-3k$, donc

$$P_{\overline{G_1}\cap\cdots\cap\overline{G_{3k}}}(G_{3k+1}) = \frac{1}{n-3k}.$$

   On obtient donc

$$P(A_{3k+1}) = \prod_{\ell=1}^{3k}\frac{n-\ell}{n-\ell+1}\cdot\frac{1}{n-3k} = \frac{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{3k}(n-\ell)}{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{3k}(n-\ell+1)}\cdot\frac{1}{(n-3k)} = \frac{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{3k}(n-\ell)}{\displaystyle\prod_{\ell=0}^{3k-1}(n-\ell)}\cdot\frac{1}{(n-3k)}.$$

   Après simplifications des termes du produit, il vient donc :

$$P(A_{3k+1}) = \frac{n-3k}{n}\cdot\frac{1}{n-3k} \qquad \text{soit:} \qquad : \boxed{P(A_{3k+1}) = \frac{1}{n}}.$$

   De la même façon, toujours pas utilisation de la formule des probabilités composées (ne redétaillez pas le calcul !) on obtient :

$$P(B_{3k+2}) = \prod_{\ell=1}^{3k+1}\frac{n-\ell}{n-\ell+1}\cdot\frac{1}{n-3k-1} = \frac{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{3k+1}(n-\ell)}{\displaystyle\prod_{\ell=0}^{3k}(n-\ell)}\cdot\frac{1}{(n-3k-1)},$$

et donc

$$P(B_{3k+2}) = \frac{n-3k-1}{n} \cdot \frac{1}{n-3k-1} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{P(B_{3k+2}) = \frac{1}{n}}.$$

En raisonnant encore de même,

$$P(C_{3k+3}) = \prod_{\ell=1}^{3k+2} \frac{n-\ell}{n-\ell+1} \cdot \frac{1}{n-3k-2} = \frac{n-3k-2}{n} \cdot \frac{1}{n-3k-2},$$

et encore une fois, on trouve $\boxed{P(C_{3k+3}) = \frac{1}{n}}$.

- **Deuxième méthode**
La simplicité de ces résultats suggère une deuxième méthode, plus combinatoire.
Supposons que l'on continue l'expérience jusqu'à vidage complet de l'urne (donc au-delà de la victoire d'un des joueurs).
Le résultat d'une expérience correspond à un ordre de tirage des boules, donc à une numérotation des boules de 1 à n, la boule numérotée k étant la boule tirée au k-ième tirage.
Toute numérotation possible des boules correspond à un résultat possible des tirages, et ces différents résultats sont équiprobables.
Par ailleurs, soit Y la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule blanche, c'est-à-dire au rang de tirage de la boule blanche. Lors d'une numérotation quelconque des boules, il y a autant de chances que la boule blanche soit numérotée 1, 2, ou n. Ainsi, la variable Y suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Or, pour tout k tel que $3k+3 \leqslant n$

$$P(A_{3k+1}) = P(Y = 3k+1), \qquad P(B_{3k+2}) = P(Y = 3k+2), \qquad P(C_{3k+3}) = P(Y = 3k+3),$$

donc, Y suivant une loi uniforme sur un ensemble de cardinal n :

$$\boxed{P(A_{3k+1}) = P(B_{3k+2}) = P(C_{3k+3}) = \frac{1}{n}}$$

2. (a) On suppose dans cette question que $\boxed{n = 3m+1}$, avec $m \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$A = A_1 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_{3m+1} = \bigcup_{k=0}^{m} A_{3k+1}.$$

Ces événements étant 2 à 2 incompatibles,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} P(A_{3k+1}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{n} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{P(A) = \frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{3m+1}}.$$

De même,

$$P(B) = \sum_{k=0}^{m-1} P(B_{3k+2}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{P(B) = \frac{m}{n} = \frac{m}{3m+1}}.$$

(on s'arrête ici à l'indice $k = m-1$, car il n'y a pas de tirage $3m+2$, puisqu'il n'y a que $3m+1$ boules)
De même

$$P(C) = \sum_{k=0}^{m-1} P(C_{3k+3}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{P(C) = \frac{m}{n} = \frac{m}{3m+1}}.$$

(b) On suppose, dans cette question, que $\boxed{n = 3m+2}$, avec $m \in \mathbb{N}$.
Cette fois-ci, A a droit à $m+1$ tirages, B aussi, mais C n'a droit qu'à m tirages (le tirage $3m+3$ n'ayant pas lieu. Ainsi, par le même argument que dans la question précédente, on obtient :

$$\boxed{P(A) = P(B) = \frac{m+1}{3m+2}, \qquad P(C) = \frac{m}{3m+2}.}$$

(c) On suppose, dans cette question, que $\boxed{n = 3m+3}$, avec $m \in \mathbb{N}$.
Cette fois-ci, A, B et C ont tous les trois droit au même nombre de tirages, à savoir $m+1$ (le nombre total de boules étant un multiple de 3). Ainsi

$$\boxed{P(A) = P(B) = P(C) = \frac{m+1}{3m+3} = \frac{1}{3}}.$$

3. Dans toutes les situations, $\boxed{P(A) \geqslant P(B) \geqslant P(C)}$, mais on peut avoir l'égalité. Tout dépend du nombre de tirage possible pour chaque joueur : suivant les propriétés de congruence modulo 3 du nombre total de boules, les premiers joueurs peuvent avoir plus de tirages que les derniers.

Partie III – Les tirages se font sans remise, dans une urne remplie aléatoirement.

L'urne est remplie de la façon suivante : on lance une pièce qui donne « pile » avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, et « face » avec la probabilité $1-p$. On pose $q = 1-p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers.
Si N prend la valeur n $(n \in \mathbb{N}^*)$, on place une boule blanche et $n-1$ boules noires dans l'urne et on procède à l'expérience décrite dans l'introduction, sans remise des boules tirées.

1. (a) Il s'agit des résultats de la question II-2, les conditions sur ces probabilités fixant le nombre de boules dans l'urne :

$$\boxed{P_{[N=3m+1]}(A) = \frac{m+1}{3m+1}, \qquad P_{[N=3m+2]}(A) = \frac{m+1}{3m+2}, \qquad P_{[N=3m+3]}(A) = \frac{1}{3}.}$$

(b) La variable aléatoire N suit une loi géométrique de paramètre p. On a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Ainsi, $([N=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet dénombrable d'événements non quasi-impossibles. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P_{[N=n]}(A).$$

En triant les valeurs de n suivant leur reste dans la division euclidienne par 3, il vient donc (toutes les séries étant absolument convergentes :

$$P(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(N=3m+1)P_{[N=3m+1]}(A) + \sum_{m=0}^{+\infty} P(N=3m+2)P_{[N=3m+2]}(A) + \sum_{m=0}^{+\infty} P(N=3m+3)P_{[N=3m+3]}(A).$$

En remplaçant par les expressions des probabilités conditionnelles obtenues dans la question précédente, et d'après l'expression d'une loi géométrique,

$$P(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m}\frac{m+1}{3m+1} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+1}\frac{m+1}{3m+2} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+3}\frac{1}{3}.$$

Cette dernière somme vaut :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+3}\frac{1}{3} = \frac{pq^3}{3}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{q^{3m}} = \frac{pq^3}{3(1-q^3)}.$$

Ainsi,

$$\boxed{P(A) = \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m+1}{3m+2}q^{3m+1}p + \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m+1}{3m+1}q^{3m}p}$$

(petite erreur dans l'énoncé, facilement rectifiable, surtout si on compare à la question suivante).

2. Le même calcul, basé sur la formule des probabilités totales, amène :

$$P(B) = \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m}\frac{m}{3m+1} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+1}\frac{m+1}{3m+2} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+3}\frac{1}{3}.$$

d'où, d'après le calcul de cette dernière somme, effectuée juste au-dessus :

$$\boxed{P(B) = \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m+1}{3m+2}q^{3m+1}p + \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m}{3m+1}q^{3m}p.}$$

3. C'est un peu répétitif, mais allons-y ! Toujours la même méthode permet de parvenir à :

$$P(C) = \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m}\frac{m}{3m+1} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+1}\frac{m}{3m+2} + \sum_{m=0}^{+\infty} pq^{3m+3}\frac{1}{3},$$

donc à :

$$\boxed{P(C) = \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m}{3m+2}q^{3m+1}p + \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m}{3m+1}q^{3m}p.}$$

4. Puisque $m < m+1$, et que les séries sont à termes strictement positifs, on a :

$$\frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+1} q^{3m} p < \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+1} q^{3m} p,$$

et

$$\frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+1} q^{3m} p < \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+1} q^{3m} p,$$

donc

$$\boxed{\mathrm{P(A)>P(B)>P(C)}}.$$

Dans les 3 questions suivantes, on cherche à déterminer une expression intégrale de $P(A)$.

5. (a) Soit $x \in [0,1[$. D'après la formule de sommation des suites géométriques de raison différente de 1 (ici la raison est $x^3 \neq 1$)

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n-1} x^{3m} = \frac{1-x^{3n}}{1-x^3}}.$$

(b) En intégrant cette relation entre 0 et q (toutes les fonctions considérées étant continues sur $[0,q]$, puisque $q<1$), et en passant l'intégrale dans la somme (on peut le faire car la somme est finie) :

$$\sum_{m=0}^{n-1} \int_0^q x^{3m}\ \mathrm{d}x = \int_0^q \frac{1-x^{3n}}{1-x^3},$$

soit, par un calcul direct des intégrales de la somme de gauche :

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n-1} \frac{q^{3m+1}}{3m+1} = \int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{1-x^3} - \int_0^q \frac{x^{3n}}{1-x^3}\ \mathrm{d}x.}$$

(c) Pour tout $x \in [0,q]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{x^{3n}}{1-x^3} \leqslant \frac{x^{3n}}{1-q^3},$$

donc, par positivité de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^q \frac{x^{3n}}{1-x^3}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{1-q^3} \int_0^q x^{3n}\ \mathrm{d}x = \frac{q^{3n+1}}{(3n+1)(1-q^3)}.$$

Puisque $q \in]0,1[$, cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\left(\int_0^q \frac{x^{3n}}{1-x^3}\ \mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^q \frac{x^{3n}}{1-x^3}\ \mathrm{d}x = 0.$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité de la question 5(b), la série étant convergente (les termes positifs sont minorés par $q \cdot q^{3m}$, terme général d'une série géométrique de raison $3m$), on obtient

$$\boxed{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q^{3m+1}}{3m+1} = \int_0^q \frac{1}{1-x^3}}.$$

6. De la même façon

$$\sum_{m=0}^{n-1} x^{3m+1} = x \cdot \sum_{m=0}^{n-1} x^{3m} = \frac{x - x^{3n+1}}{1-x^3},$$

donc, en intégrant entre 0 et q,

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{q^{3m+2}}{3m+2} = \int_0^q \frac{x}{1-x^3}\ \mathrm{d}x - \int_0^q \frac{x^{3n+1}}{1-x^3}\ \mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \int_0^q \frac{x^{3n+1}}{1-x^3}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{1-q^3} \int_0^q x^{3n+1}\ \mathrm{d}x = \frac{q^{3n+2}}{(3n+2)(1-q^3)},$$

donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \frac{x^{3n+1}}{1-x^3}\,\mathrm{d}x = 0,$$

d'où finalement,

$$\boxed{\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{q^{3m+2}}{3m+2} = \int_0^q \frac{x}{1-x^3}\,\mathrm{d}x.}$$

7. (a) On a :

$$\frac{m+1}{3m+1} = \frac{\frac{1}{3}(3m+1)+\frac{2}{3}}{3m+1}, \qquad \text{donc:} \quad \boxed{\frac{m+1}{3m+1} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3m+1}}.$$

De la même façon,

$$\frac{m+1}{3m+2} = \frac{\frac{1}{3}(3m+2)+\frac{1}{3}}{3m+2}, \qquad \text{donc:} \quad \boxed{\frac{m+1}{3m+1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3m+2}}.$$

(b) On a donc :

$$P(A) = \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{+\infty} q^{3m+1}p + \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{q^{3m+1}}{3m+2} + \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{+\infty} q^{3m}p + \frac{2}{3}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{q^{3m}}{3m+1}$$

donc, d'après la question précédente, et d'après la formule de sommation des séries géométriques :

$$P(A) = \frac{pq^2}{3(1-q^3)} + \frac{pq}{3}\cdot\frac{1}{1-q^3} + \frac{p}{3}\cdot\frac{1}{1-q^3} + \frac{p}{3q}\int_0^q \frac{x}{1-x^3}\,\mathrm{d}x + \frac{2p}{3q}\int_0^q \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Par conséquent :

$$P(A) = \frac{p(1+q+q^2)}{3(1-q^3)} + \frac{p}{3q}\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3} = \frac{p}{3(1-q^3)}\cdot\frac{1-q^3}{1-q} + \frac{p}{3q}\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3},$$

et, puisque $p = 1-q$, on obtient finalement

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{3} + \frac{p}{3q}\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x.}.$$

8. On pose $p = \frac{1}{2}$, dans cette question uniquement. On a donc :

$$\forall x \in [0,q] = [0,\frac{1}{2}], \quad \frac{x+2}{1-x^3} \geqslant x+2,$$

d'où, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3} \geqslant \int_0^q (x+2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} (x+2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}+1 = \frac{9}{8}.$$

Ainsi,

$$P(A) =\geqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{1}{3}+\frac{3}{8} = \frac{8+9}{24},$$

et on obtient bien la minoration $\boxed{P(A) \geqslant \frac{17}{24}}$.

9. (a) Recherchons α, β et γ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on ait :

$$\frac{x+2}{1-x^3} = \frac{-x-2}{(x-1)(1+x+x^2)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+x+1}.$$

En mutlipliant par $x-1$ et en évaluant en 1, on trouve $\boxed{\alpha = -1}$
En mutlipliant par x et en considérant la limite en $+\infty$, on trouve $\alpha+\beta = 0$, donc $\beta = 1$.
En évaluant en 0, on trouve : $2 = -\alpha+\gamma$, donc $\gamma = 1$.
Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \boxed{\frac{x+2}{1-x^3} = \frac{-1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.}$$

(b) On a alors

$$\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^q \frac{-1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-q) + \int_0^q \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$$

(ici on peut manipuler les intégrales sans danger : elles ne sont pas impropres) Or :

$$\int_0^q \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x+x^2)\Big]_0^q = \frac{1}{4}\ln(1+q+q^2)$$

et

$$\int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} = \int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2+1}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\Big)\Big]_0^q\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

On obtient au final :

$$\boxed{\int_0^q \frac{2+x}{1-x^3}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-q) + \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.}$$

(c) On a donc :

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{p}{3(1-p)}\left(-\ln(p) + \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right).$$

Lorsque p tend vers 0 (donc q tend vers 1), tous les termes de la dernière parenthèse admettent une limite finie, sauf $-\ln(p)$ qui tend vers $+\infty$. Ce terme est donc prépondérant sur les autres, et

$$\frac{p}{3(1-p)}\left(-\ln(p) + \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-p\ln p}{3}.$$

D'après les croissances comparées, il vient donc

$$\lim_{p\to 0}\frac{p}{3(1-p)}\left(-\ln(p) + \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) = 0,$$

donc $\boxed{\lim_{p\to 0} P(A) = \frac{1}{3}}$.

Ce résultat est logique : lorsque p tend vers 0, la probabilité de succès est quasi-nulle, la variable aléatoire N va donc prendre des valeurs très grandes, ce qui équilibre les chances des différents joueurs (le nombre de tirage nécessaire pour obtenir la première boule blanche va être grand, et dans ce cas, le fait d'avoir joué en premier perd de son importance)

(d) Effectuons un DL à l'ordre 1 en q de l'expression entre parenthèse :

$$-\ln(1-q) = q + o(q) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) = \frac{1}{2}q + o(q).$$

Par ailleurs, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\Big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2},$$

donc $f'(0) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$. D'après la formule de Taylor-Young, on a donc :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2}q + o(q),$$

d'où finalement :

$$-\ln(p) + \frac{1}{2}\ln(1+q+q^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\Big) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = q + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q + o(q) = 2q + o(q).$$

Ainsi,

$$\frac{p}{3q}\left(-\ln(p)+\frac{1}{2}\ln(1+q+q^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(q+\frac{1}{2})\right)-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)\underset{p\to 1}{\sim}\frac{2q}{q}=\frac{2}{3}.$$

On en déduit que $\boxed{\lim_{p\to 1} P(A)=1}$.

Ce résultat est encore une fois très logique : lorsque p s'approche de 1, on tend vers une situation pour laquelle le premier succès est obtenu tout de suite, donc il n'y a qu'une boule dans l'urne (la boule blanche) : dans ce cas, A jouant en premier, c'est lui qui la tire.

10. Dernier calcul de ce problème... On revient à l'expression intégrale de $P(A)$, que l'on dérive, par rapport à p, en se servant des règles usuelles de dérivation des intégrales dépendant de leur borne. En notant $g(p)=P(A)$, on obtient :

$$\forall p\in]0,1[,\quad g'(p)=\frac{1}{3}\left(\frac{(1-p)+p}{(1-p)^2}\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x-\frac{p}{1-p}\cdot\frac{q+2}{1-q^3}\right)=\frac{1}{3(1-p)^2}\left(\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x-\frac{pq(q+2)}{1-q^3}\right).$$

Or,

$$\int_0^q \frac{x+2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^q 2\,\mathrm{d}x = 2q$$

et

$$\frac{pq(q+2)}{1-q^3}=\frac{q(q+2)}{1+q+q^2}.$$

Une étude de la fonction $q\mapsto \frac{q+2}{1+q+q^2}$ montre qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc strictement inférieure à sa valeur en 0, égale à 2. Ainsi

$$\frac{pq(q+2)}{1-q^3}<2q.$$

On en déduit donc de $g'(p)\geqslant 0$, donc que $P(A)$ croit en fonction de p. Comme sa limite en 0 est égale à $\frac{1}{3}$, on en déduit que pour tout $p\in]0,1[$, $\boxed{P(A)>\frac{1}{3}}$

Partie IV – Simulation informatique

1.
```
program edhec_2007;
var a,b,c,n:integer;
begin
  readln(n); randomize;
  repeat
    a:=random(n);
    if a=0 then writeln('A est vainqueur')
    else begin
           b:=random(n);
           if b=0 then writeln('B est vainqueur')
           else begin
                  c:= random(n);
                  if c=0 then writeln('C est vainqueur');
                end;
         end;
  until (a*b*c=0);
end.
```

2.
```
program edhec_2007_bis;
var a,b,c,n:integer;
begin
  readln(n); randomize;
  repeat
    a:=random(n);
    n:=n-1;    {une boule en moins dans l'urne}
    if a=0 then  writeln('A est vainqueur')
    else begin
           b:=random(n);
           n:=n-1;
           if b=0 then writeln('B est vainqueur')
           else begin
                  c:= random(n);
                  n:=n-1;
                  if c=0 then writeln('C est vainqueur');
```

```
            end;
        end;
    until (a*b*c=0);
end.
```

Correction du problème 2 –

Partie I – L'intégrale de Dirichlet $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$**.**

1. Tout d'abord, $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et prolongeable par continuité en 0, puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Ainsi, $\boxed{\text{la seule impropreté est en } +\infty.}$

   Effectuons une intégration, en posant les deux fonctions u et v suivantes, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$:

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad u(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad v(x) = -\cos x.$$

   On a alors

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad u'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad v(x) = \sin x.$$

   Alors pour tout $x \in [1, +\infty[$, $u(x)v(x) = -\frac{\cos x}{x}$, et par conséquent, uv admet une limite finie (nulle) en $+\infty$. Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties pour les intégrales impropres, les deux intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}$$

   sont de même nature. Or,

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leqslant \frac{|\cos x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2},$$

   et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$, de paramètre $2 > 1$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives par inégalités, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge.

   Ainsi, d'après ce qui précède, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

2. (a)

   (b) Pour commencer, justifions l'existence des intégrales I_n. Cette justification, même si non demandée explicitement, est sous-entendue, puisque l'égalité demandée n'a de sens que si les intégrales convergent.

   Soit donc $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, et prolongeable par continuité en 0, puisque

$$\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(2n+1)t}{t} = 2n+1.$$

   Ainsi, l'intégrale I_n est faussement impropre, donc convergente.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2nt)\sin t}{\sin t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\Big[\sin(2nt)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{0 = I_n - I_{n-1}}. \end{aligned}$$

   (c) Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi}{2} = I_n}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Ici, l'intégrale est définie sur $[a, b]$, il n'y a donc pas besoin de prendre de précaution particulière pour l'intégration par parties. On définit les deux fonctions suivantes :

$$\forall t \in [a, b], \quad u(t) = f(t) \qquad \text{et} \qquad v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt).$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$\forall t \in [a,b], \quad u'(t) = f'(t) \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \sin(nt).$$

Ainsi, la formule d'intégration par parties donne :

$$J_n = -\frac{1}{n}\Big[f(t)\cos(nt)\Big]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t.$$

Or, les fonctions f et f' sont continues sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$, elle y sont donc bornées. Il existe donc M tel que pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t)| \leqslant M$ et $|f'(t)| \leqslant M$. On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire pour les sommes, puis pour les intégrales, et d'après la propriété de croissance de l'intégrale, que :

$$\begin{aligned}|J_n| &\leqslant \frac{1}{n}\left(|f(b)\cos(nb)| + |f(a)\cos(na)| + \left|\int_a^b f'(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t\right|\right)\\ &\leqslant \frac{1}{n}\left(2M + \int_a^b |f'(t)\cos(nt)|\ \mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(2M + \int_a^b M\ \mathrm{d}t\right) = \frac{2+b-a}{n}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, on a : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$.

4. On utilise le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\frac{\pi}{2}]$: il suffit donc de montrer que f' admet une limite finie en 0. En particulier, il est inutile de justifier l'existence d'une limite en 0 de f : cela vient en bonus.
Pour tout $t \in]0,\frac{\pi}{2}$, on a :
$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{-\sin^2 t + t^2\cos t}{t^2\sin^2 t}.$$
Or, $t^2\sin^2 t \underset{t\to 0}{\sim} t^4$. Cherchons donc un DL à l'ordre 4 du numérateur :
$$-\sin^2 t + t^2\cos t = -(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4))^2 + t^2(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)) = -t^2 + \frac{t^4}{3} + t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4) = -\frac{t^4}{6}.$$
Ainsi, $f'(t) \underset{0}{\sim} -\dfrac{t^4/6}{t^4} = -\dfrac{1}{6}$.
Donc f' admet une limite en 0. On en déduit, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, que $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\frac{\pi}{2}]}$.

5. La fonction f étant prolongeable par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, d'après la question I-2b,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right)\sin((2n+1)t)\ \mathrm{d}t = 0.$$
Comme l'intégrale I_n converge ainsi que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\ \mathrm{d}t$ (faussement impropre), et comme I_n est une constante égale à $\frac{\pi}{2}$, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement de variables $u = (2n+1)t$ c'est-à-dire $t = \frac{u}{2n+1} = \varphi(u)$, où φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\frac{2n+1}{2}\pi]$ sur $[0\frac{\pi}{2}]$ (la bijectivité ne sert à rien ici, les intégrales n'étant pas impropres), on a
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}(2n+1)\frac{\sin u}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2n+1} = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u.$$
Ainsi :
$$I = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\ \mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi}{2} = I}.$$

Partie II – Étude d'intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t$

1. (a) La fonction f' est continue sur $[0,+\infty[$, car f est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\ \mathrm{d}t$ est impropre au point $+\infty$ uniquement.

De plus, une primitive de f' est f, qui admet une limite finie en $+\infty$. L'existence d'une limite finie de la primitive aux points d'impropriété assurant la convergence, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\ \mathrm{d}t \text{ est convergente}}$.

(b) La fonction $t \mapsto \sin t f(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une unique impropriété en $+\infty$

On effectue une intégration par parties, à l'aide des fonctions u et v suivantes, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$:

$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad \begin{array}{ll} u(t) = -\cos t & v(t) = f(t) \\ u'(t) = \sin t & v'(t) = f'(t). \end{array}$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t f'(t)$ sont de même nature.

Or, pour tout $t \in [0,+\infty[$,

$$|\cos t f'(t)| = |\cos t| \cdot |f'(t)| \leqslant |f'(t)| = -f'(t),$$

puisque $f' \leqslant 0$, du fait de la décroissance de f. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (-f'(t))\ \mathrm{d}t$ étant convergente d'après la question précédente, et les fonctions étant positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\cos t f'(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente, d'après le théorème de comparaison par inégalité d'intégrales de fonctions positives.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t f'(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente. On déduit donc de la comparaison issue de l'intégration par parties que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge}}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale $\displaystyle\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t$ n'est pas impropre. On y effectue le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ donné par $u = t - \pi$. on obtient :

$$\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(u+\pi)| f(u+\pi)\ \mathrm{d}u = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(u)| f(u+\pi)\ \mathrm{d}u,$$

puisque $u \mapsto |\sin u|$ est π-périodique. Or, pour tout $u \in [n\pi, (n+1)\pi]$, du fait de la décroissance de f, on a :

$$|\sin(u)| f(u+\pi) \leqslant |\sin(u)| f(u),$$

et donc, par la propriété de croissance de l'intégrale,

$$\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(u)| f(u+\pi)\ \mathrm{d}u \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(u)| f(u)\ \mathrm{d}u.$$

La variable d'intégration étant muette, on obtient bien l'inégalité :

$$\boxed{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f étant décroissante et positive, pour tout $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$,

$$0 \leqslant |\sin t| f(t) \leqslant |\sin t| f(n) \leqslant f(n).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(n) = \pi f(n).$$

Puisque f est de limite nulle en $+\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \pi f(n) = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la suite $\displaystyle\left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$, admet une limite et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t = 0}.$$

(c) La fonction f étant positive, et la fonction sin étant de signe constant sur tout intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$, positif si n est pair, et négatif si n est impair, on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin t f(t)\ \mathrm{d}t=(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t=(-1)^n u_n$$

où on a posé, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t$. Alors, (v_n) est décroissante de limite nulle. La série de terme général $(-1)^n v_n$ est donc une série alternée. Le théorème spécial de convergence des séries alternées n'étant pas au programme, on réexpose rapidement l'argument : notons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k$

- $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_{2n+2}-S_{2n}=v_{2n+2}-v_{2n+1}\leqslant 0$, car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît ;
- $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_{2n+3}-S_{2n+1}=-v_{2n+3}+v_{2n+2}\geqslant 0$, car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît ;
- $S_{2n+1}-S_{2n}=-v_{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$,

donc les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite S. Les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) ayant une même limite S, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers S.

Ainsi, $\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n v_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin t f(t)\ \mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

(d) De la question précéédente, on déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin t f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, donc, en utilisant la relation de Chasles, que $\displaystyle\int_0^{n\pi}\sin t f(t)\ \mathrm{d}t$ tend vers un certain réel I lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $A\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $n=\left\lfloor\frac{A}{\pi}\right\rfloor$. Alors $A\in[n\pi,(n+1)\pi[$, et

$$\int_0^A\sin t f(t)\ \mathrm{d}t=\int_0^{n\pi}\sin t f(t)\ \mathrm{d}t+\int_{n\pi}^A\sin t f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire et puisque $A\in[n\pi,(n+1)\pi[$, on a :

$$\left|\int_{n\pi}^A\sin t f(t)\ \mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{n\pi}^A|\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t\leqslant\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t=v_n.$$

Comme (v_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et comme n tend vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{n\pi}^A\sin t f(t)\ \mathrm{d}t=0,$$

d'après le théorème d'encadrement

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^{n\pi}\sin t f(t)\ \mathrm{d}t=I$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^A\sin t f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite lorsque A tend vers $+\infty$, donc $\boxed{\text{l'intégrale }\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin t f(t)\ \mathrm{d}t\text{ converge.}}$

3. (a) Le théorème de comparaison entre séries et intégrales dit la chose suivante : si g est une fonction continue sur $[0,+\infty[$, décroissante et positive (de limite nulle ou non), alors la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}g(k)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature.

Pour se ramener à cet énoncé de façon précise, on effectue le changement de variable $t=\pi u$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, strictement croissant, bijectif de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\pi f(\pi u)\ \mathrm{d}u$ sont de même nature, donc divergentes. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(\pi u)\ \mathrm{d}u$ étant divergente, et la fonction $u\mapsto f(\pi u)$ étant continue, décroissante et positive, le théorème de comparaison entre séries et intégrales permet d'affirmer que $\boxed{\text{la série de terme général } f(n\pi) \text{ diverge.}}$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a, par décroissance de f :

$$\forall t\in[(n-1)\pi,n\pi],\quad f(t)\geqslant f(n\pi)\qquad\text{donc:}\qquad |\sin t|f(t)\geqslant|\sin t|f(n\pi).$$

Par conséquent,

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t\geqslant f(n\pi)\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin t|\ \mathrm{d}t=f(n\pi)\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\sin t\ \mathrm{d}t\right|,$$

car sin est de signe constant sur $[(n-1)\pi, n\pi]$. Ainsi,

$$\boxed{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant f(n\pi)|\cos((n-1)\pi) - \cos(n\pi)| = 2f(n\pi)}.$$

(c) Puisque $2f(n\pi) \geqslant 0$, et que la série de terme général $f(n\pi)$ est divergente, on déduit du théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série de terme général $\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge, donc, puisque ce terme général est positif, que sa somme partielle tend vers $+\infty$.

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t = +\infty \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t = +\infty}.$$

Ainsi, par la contraposée du critère séquentiel de l'existence d'une limite en $+\infty$, on en déduit que la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_0^A |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t = +\infty$ n'admet pas de limite finie en $+\infty$, donc que

$\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{n\pi} |\sin t| f(t)\ \mathrm{d}t \text{ diverge.}}$

4. (a) La fonction f admet une limite (finie ou infinie) donc $|f|$ également. Cette limite ℓ de $|f|$ est non nulle. Elle peut donc être soit un réel strictement positif, soit $+\infty$. Distinguons les 2 cas :

- si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors en prenant $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ dans la définition de la limite, on obtient l'existence d'un réel x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$,
$$\frac{\ell}{2} = \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon = \frac{3\ell}{2}.$$
Il suffit alors de poser $\delta = \frac{\ell}{2}$. Le couple (δ, x_0) répond au problème posé.
- Si $\ell = +\infty$, alors en prenant $A = 1$ dans la définition de la limite, il existe x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) > A = 1$. Il suffit alors de poser $\delta = 1$. Le couple (δ, x_0) répond alors au problème posé.

Par ailleurs, si f n'est pas de signe constant sur $]x_0, +\infty[$, f étant continue sur cet intervalle, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait $y_0 \in]x_0, +\infty[$, tel que $f(y_0) = 0$. Cette valeur y_0 ne vérifie donc pas $|f(y_0)| > \delta$, d'où une contradiction.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est de signe constant sur }]x_0, +\infty[.}$

(b) Le raisonnement est ensuite le même que dans la question précédente, à ceci près qu'il faut faire un peu plus attention au signe de f, puisqu'elle n'est pas supposée positive ici.

Soit n tel que $n\pi > x_0$. Alors f est de signe constant sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, d'après la question précédente, et sin aussi. Ainsi, $t \mapsto \sin t f(t)$ est de signe constant sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, d'où :

$$\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t \right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| \cdot |f(t)|\ \mathrm{d}t.$$

Comme $f \geqslant \delta$ sur $]x_0, +\infty[$, donc en particulier sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, on en déduit, d'après la propriété de croissance de l'intégrale, que :

$$\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t \right| \geqslant \delta \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\ \mathrm{d}t = 2\delta,$$

le dernier calcul ayant été effectué en 3(b). Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \text{ tel que } n\pi > x_0,\ \left| \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t \right| \geqslant 2\delta.}$

(c) L'inégalité obtenue dans la question précédente empêche le terme $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t$ d'avoir une limite nulle en $+\infty$. Ainsi, la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t$ est divergente, donc la suite $\left(\displaystyle\int_0^{n\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t \right)_{n\in\mathbb{N}}$ (somme partielle de ladite série) n'admet de limite en $+\infty$, donc, d'après le critère séquentielle, la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_0^A \sin t f(t)\ \mathrm{d}t$ n'admet pas de limite lorsque A tend vers $+\infty$. Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t \text{ diverge.}}$

(d) Vous remarquerez que la borne inférieure est ici égale à 1 (pour éviter une éventuelle impropriété en 0), mais cela ne modifie en rien les critères trouvés précédemment.

- $\boxed{\text{Si } \alpha \leqslant 0}$, alors $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ admet en $+\infty$ une limite égale à 1 (si $\alpha = 0$) ou $+\infty$ (dans les autres cas). Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\ dt \text{ diverge.}}$

- $\boxed{\text{Si } 0 < \alpha \leqslant 1}$, alors, d'après II-1(b), la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, décroissante et de limite nulle, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ est convergente. Mais, puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est divergente (intégrale de Riemann de paramètre $\alpha < 1$), on déduit de la question II-3(c) qu'elle n'est pas absolument convergente. Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \text{ est semi-convergente}}$.
- $\boxed{\text{Si } \alpha > 1}$, alors la comparaison

$$\forall x \geqslant 1, \quad \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha},$$

la positivité des fonctions en jeu, et la convergence des intégrales de Riemann de paramètre $\alpha > 1$ assurent $\boxed{\text{la convergence absolue de } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t}$.

(e) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(t^\beta)}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Ainsi, la seule impropriété est en $+\infty$.
Le changement de variables $x = t^\beta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, strictement croissant, bijectif de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$ (car $\beta > 0$), et $t = x^{\frac{1}{\beta}}$, donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1}{\beta} - 1}\, \mathrm{d}x$. Ainsi, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\beta)}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \cdot \frac{1}{\beta} x^{\frac{1}{\beta} - 1}\, \mathrm{d}x$ sont de même nature (la convergence absolue et la semi-convergence étant préservée, puisqu'on pourrait faire le même changement de variable sur l'intégrale des valeurs absolues). Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\beta)}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}}\, \mathrm{d}x$.
D'après la question précédente, elle est
- divergente si $\frac{\alpha+\beta-1}{\beta} \leqslant 0$ *i.e.* si $\alpha + \beta \leqslant 1$
- semi-convergente si $\frac{\alpha+\beta-1}{\beta} \in]0, 1]$, *i.e.* si $\alpha + \beta > 1$ et $\alpha \leqslant 1$
- absolument convergente si $\frac{\alpha+\beta-1}{\beta} > 1$ si $\frac{\alpha+\beta-1}{\beta} > 1$, *i.e.* si $a > 1$ (ce qu'on retrouve facilement par un argument direct).

5. (a) La fonction $x \mapsto \frac{\cos(2x)}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Posons u et v les deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ définies par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad \begin{array}{ll} u(x) = \frac{1}{x} & v(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \\ u'(x) = -\frac{1}{x^2} & v'(x) = \cos(2x). \end{array}$$

La fonction uv admet de manière évidente une limite (nulle) en $+\infty$, donc le théorème d'intégration par partie permet d'affirmer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\, \mathrm{d}x$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}\, \mathrm{d}x$.
La majoration :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \left|\frac{\sin(2x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

permet d'affirmer la convergence de cette dernière intégrale, par comparaison (entre fonctions positives) à une intégrale de Riemann convergente.
Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\, \mathrm{d}x \text{ converge}}$.
On a, pour tout x de $[1, +\infty[$:

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos(2x)}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(2x)}{x}\right)$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$ diverge, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\, \mathrm{d}x$ converge. Ainsi leur somme est divergente.
Par conséquent, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \text{ diverge}}$

(b) On a ici, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$\sin t f(t) = \frac{\sin^2 t}{t} + \frac{\sin t}{t}.$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}$ diverge, et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge. Donc leur somme est divergente.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t f(t)\, \mathrm{d}t \text{ diverge.}}$

La fonction f est ici de classe $\mathcal{C}^1$, de limite nulle, mais pas décroissante (elle est toujours positive, et s'annule une infinité de fois, elle oscille entre 0 et des valeurs positives de plus en plus proches de 0).
Par conséquent, la décroissance de f est une hypothèse indispensable du résultat de la question II-2.

Partie III – Étude d'intégrales du type $\displaystyle\int_1^{+\infty} s(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ où s est périodique

1. (a) La fonction s est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une primitive S. Soit S une primitive quelconque.
Soit $g : x \mapsto \int_x^{T+x} s(t)\ \mathrm{d}t$. D'après un théorème du cours (dérivation des intégrales dépendant de leurs bornes), g est de classe $\mathcal{C}^1$, et
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = s(T+x) - s(x) = 0,$$
puisque s est périodique. Ainsi, g est constante : l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas de la période choisie.
Soit alors $x \in \mathbb{R}$. On a donc :
$$S(T+x) - S(T) = \int_x^{T+x} s(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^T s(t)\ \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{donc:} \qquad S(T+x) = S(x).$$
Ainsi, $\boxed{S \text{ est } T\text{-périodique}}$.

(b) Soit S une primitive de s. La fonction S est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,T]$, donc elle est bornée sur cette intervalle : il existe M tel que pour tout $x \in [0,T]$, $|S(x)| \leqslant M$. Puisque S est T-périodique, cette inégalité reste vraie sur tout $\mathbb{R}$
Ainsi, $\boxed{S \text{ est bornée.}}$

(c) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et de limite nulle, et que S est de classe $\mathcal{C}^1$, et bornée, on peut faire une intégration par partie avec $u = S$, $v = f$, et Sf tend vers 0 en $+\infty$. Ceci nous assure que $\displaystyle\int_1^{+\infty} s(x)f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} S(x)f'(x)$ sont de même nature.
Or, S étant bornée, il existe M tel que
$$\forall x \in [1,+\infty[,\quad |S(x)f'(x)| \leqslant M|f'(x)| = -Mf'(x),$$
puisque $f' \leqslant 0$, par décroissance de f.
Les hypothèses sur f étant similaires à celles de II-1, un argument donné lors de cette question montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'(x)\ \mathrm{d}x$ converge. Ainsi, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} |S(x)f'(x)|\ \mathrm{d}x$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} S(x)f'(x)\ \mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge.
Et finalement, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} s(x)f(x)\ \mathrm{d}x \text{ est convergente}}$.

2. (a) Posons $m = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\ \mathrm{d}t$. Alors
$$\int_0^T m\ \mathrm{d}t = \int_0^T s(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\int_0^T (s(t)-m)\ \mathrm{d}t = 0}$$
Par ailleurs, puisque $\displaystyle\int_0^T s(t)\ \mathrm{d}t \neq 0$, $\boxed{m \neq 0}$.

(b) La fonction $t \mapsto s(t)-m$ est T-périodique, d'intégrale nulle sur une période, et f est de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle. Ainsi, on est dans les conditions d'application de III-1 : $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} (s(t)-m)f(t)\ \mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$
Par ailleurs, m étant non nul, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)$ étant divergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} mf(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.
La somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente étant divergente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} (s(t)-m)f(t) + mf(t)\ \mathrm{d}t$ diverge, donc $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} s(t)f(t)\ \mathrm{d}t \text{ est divergente.}}$

3. Exemple.
(a) • Si $\alpha > 1$, on a convergence absolue, par comparaison directe à une intégrale de Riemann de paramètre α

- Si $\alpha \in]0,1]$: la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, décroissante de limite nulle et :
  - si n est impair, $x \mapsto \sin^n x$ est 2π-périodique, et impaire, et

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x \; \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x \; \mathrm{d}x = 0,$$

par imparité. Ainsi, on est dans les conditions d'application du III-1 : l'intégrale est convergente.
  - Si n est pair, $x \mapsto \sin^n x$ est π-périodique, continue et positive, non identiquement nulle. Ainsi, d'après la propriété de stricte positivité de l'intégrale,

$$\int_0^{\pi} \sin^n x \; \mathrm{d}x > 0.$$

On est donc dans les conditions d'application du III-2 : l'intégrale est divergente.

(b) Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$. Soit $g : x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}$ définie sur $[1,+\infty[$. Pour tout $x \geqslant 1$,

$$g(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}}.$$

Soit n un entier tel que $(2n+1)\alpha > 1$. Alors :

$$g(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)^k + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{2n\alpha}}\right)\right) = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)^{k+1} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{(2n+1)\alpha}}\right).$$

Il existe donc une fonction h en $\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{(2n+1)\alpha}}\right)$ telle que

$$g(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\sin^{2\ell} x}{x^{2\alpha\ell}} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\sin^{2\ell-1} x}{x^{(2\ell-1)\alpha}} + h(x).$$

- Or,

$$\int_1^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\sin^{2\ell-1} x}{x^{(2\ell-1)\alpha}} \; \mathrm{d}x$$

converge en tant que sommes d'intégrales convergentes, d'après la question précédente, les puissances du sin étant toute paires.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\;\mathrm{d}x$ converge, absolument, par comparaison de la fonction positive $|h|$ à $\frac{1}{x^{(2n+1)\alpha}} \geqslant 0$, cette dernière fonction étant d'intégrale convergente, puisque $(2n+1)\alpha$ est supposé supérieur strictement à 1.
- Enfin, $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \frac{\sin^{2\ell} x}{x^{2\alpha\ell}}$ étant une somme de fonctions positives, la divergence de l'intégrale de l'une d'entre elle suffit à assurer la divergence de la somme (il ne peut pas y avoir compensation des divergences : elles s'ajoutent ici). Or, le premier terme de cette somme est $\displaystyle\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}$. Comme $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $2\alpha \leqslant 1$, donc, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\;\mathrm{d}x$ diverge. Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\sin^{2\ell} x}{x^{2\alpha\ell}} \; \mathrm{d}x$$

diverge.

Par conséquent, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\;\mathrm{d}x$ est la somme de deux intégrales convergentes et d'une intégrale divergente.

Ainsi, si $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\;\mathrm{d}x \text{ est divergente.}}$