

Correction du Concours Blanc 1 – Épreuve 1 – (DS n° 3)

Correction du problème 1 –

Partie I – Étude d'une suite récurrente

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+3} = \frac{1}{3} \cdot (u_{n+2} + u_{n+1} + u_n), \quad n \geq 0. \quad (1)$$

Le polynôme caractéristique de cette relation est :

$$P(X) = X^3 - \frac{1}{3}(X^2 + X + 1).$$

Ce polynôme admet une racine évidente 1, et peut donc être factorisé de la sorte :

$$P(X) = (X - 1) \left(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}(X - 1)(3X^2 + 2X + 1).$$

Soit Δ le discriminant du polynôme $3X^2 + 2X + 1$. On a :

$$\Delta = 4 - 12 = -8 = (i2\sqrt{2})^2,$$

donc ce polynôme admet 2 racines complexes conjuguées :

$$\boxed{\alpha = \frac{-2 + i2\sqrt{2}}{6} = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{\bar{\alpha} = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}}.$$

Ainsi, le polynôme caractéristique $P(X)$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ récurrente d'ordre 3 admet 3 racines distinctes 1, α et $\bar{\alpha}$. On en déduit, d'après les résultats concernant l'explicitation des suites récurrentes linéaires, qu'il existe des complexes x , y et z tels que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = x \cdot 1^n + y \cdot \alpha^n + z \cdot \bar{\alpha}^n = x + y\alpha^n + z\bar{\alpha}^n.}$$

2. En explicitant la relation trouvée dans la question précédente aux rangs 0, 1 et 2, il vient le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = u_0 \\ x + \alpha y + \bar{\alpha} z = u_1 \\ x + \alpha^2 y + \bar{\alpha}^2 z = u_2 \end{cases}$$

De plus, les complexes α et $\bar{\alpha}$ sont les racines du polynôme $3X^2 + 2X + 1$, donc vérifient les relations $3\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ et $3\bar{\alpha}^2 + 2\bar{\alpha} + 1 = 0$. En effectuant la combinaison de lignes $3L_3 + 2L_2 + L_1$ dans le système précédent, il vient alors :

$$6x + (3\alpha^2 + 2\alpha + 1)y + (3\bar{\alpha}^2 + 2\bar{\alpha} + 1)z = 3u_2 + 2u_1 + u_0 \quad \text{donc:} \quad \boxed{x = \frac{1}{6}(3u_2 + 2u_1 + u_0)}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x + y\alpha^n + z\bar{\alpha}^n$. De plus,

$$|\alpha|^2 = |\bar{\alpha}|^2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} < 1,$$

donc les suites géométriques $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\bar{\alpha}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0.

On en déduit que (u_n) admet une limite finie, égale à $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{6}(3u_2 + 2u_1 + u_0)}.$

Partie II – Étude d'un endomorphisme de polynôme annulateur donné, et d'un projecteur.

On considère désormais un endomorphisme f de l'espace vectoriel E vérifiant la relation :

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I). \quad (2)$$

1. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

(a) L'unicité de (a_n, b_n, c_n) provient de l'indépendance linéaire de I , f et f^2 .

Montrons l'existence par récurrence sur $\mathbb{N}$.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$, $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$ ».

- On a $f^0 = I$, donc $(a_0, b_0, c_0) = (0, 0, 1)$ convient, et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Il existe donc (a_n, b_n, c_n) dans $\mathbb{R}^3$ tels que $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$.

Alors :

$$f^{n+1} = a_n f^3 + b_n f^2 + c_n f = \frac{a_n}{3}(f^2 + f + I) + b_n f^2 + c_n f = \left(\frac{a_n}{3} + b_n\right) f^2 + \left(\frac{a_n}{3} + c_n\right) f + \frac{a_n}{3} \cdot I.$$

Posons alors :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{a_n}{3} + b_n \\ b_{n+1} &= \frac{a_n}{3} + c_n \\ c_{n+1} &= \frac{a_n}{3} \end{cases} \quad (3)$$

Ces valeurs vérifient bien la relation $f^{n+1} = a_{n+1} f^2 + b_{n+1} f + c_{n+1} I$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$

De manière évidente on obtient :

$$\boxed{(a_0, b_0, c_0) = (0, 0, 1)} \quad \boxed{(a_1, b_1, c_1) = (0, 1, 0)} \quad \boxed{(a_2, b_2, c_2) = (1, 0, 0)}$$

L'argument donné lors de la récurrence donne également la relation demandée entre $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ et (a_n, b_n, c_n) .

(b) • Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant successivement les relations (3) :

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}}{3} + b_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{3} + \frac{a_{n+1}}{3} + c_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{3} + \frac{a_{n+1}}{3} + \frac{a_n}{3}.$$

Ainsi, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (1).

Sa limite est donc, d'après la question I-3, $a = \frac{1}{6}(3a_2 + 2a_1 + a_0) = \frac{1}{2}$.

- La suite $(c_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est égale, à une constante multiplicative près, à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc elle vérifie (1). Pour que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (1), il suffit donc de vérifier la première relation :

$$c_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(c_0 + c_1 + c_2).$$

Ainsi, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (1). Elle admet donc une limite $c = \frac{1}{6}(3c_2 + 2c_1 + c_0) = \frac{1}{6}$.

- Enfin, $(b_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est, d'après (3), une combinaison linéaire de deux suites vérifiant (1), donc elle vérifie aussi (1). Comme pour $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il suffit donc de vérifier la relation initiale :

$$b_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(b_0 + b_1 + b_2).$$

Ainsi, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (1). Elle admet donc une limite $b = \frac{1}{6}(3b_2 + 2b_1 + b_0) = \frac{1}{3}$.

On peut aussi retrouver les relations ci-dessus plus simplement en exploitant la relation $f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I)$, qui implique $f^{n+3} = \frac{1}{3}(f^{n+2} + f^{n+1} + f^n)$, et remplacer dans cette expression f^{n+3} , f^{n+2} , f^{n+1} et f^n par leur expression en fonction de I , f , f^2 et des a_i , b_i et c_i . On trouve alors les trois relations d'un coup, en faisant une identification, du fait que la famille (I, f, f^2) est libre.

- (c) D'après les résultats précédents, $q = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{3}f + \frac{1}{6}I$. Calculons $q \circ q$:

$$\begin{aligned} q \circ q &= \frac{1}{36}(3f^2 + 2f + I)^2 = \frac{1}{36}(9f^4 + 12f^3 + 10f^2 + 4f + I) \\ &= \frac{1}{36}(3(f^3 + f^2 + f) + 12f^3 + 10f^2 + 4f + I) \\ &= \frac{1}{36}(5(f^2 + f + I) + 3f^2 + 3f + 10f^2 + 4f + I) = \frac{1}{36}(18f^2 + 12f + 6I) = q \end{aligned}$$

Donc q est un projecteur.

- (d) Puisque $I = 3f^3 - f^2 - f = f(3f^2 - f - I) = (3f^2 - f - I)f$, f est inversible, d'inverse

$$f^{-1} = 3f^2 - f - I.$$

2. Étude du projecteur q .

- (a) i. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $f^n(x) = \lambda^n x$.
- On a $f^0(x) = \text{id}(x) = x = \lambda^0 x$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a donc $f^n(x) = \lambda^n x$. Par linéarité de f , il vient alors

$$f^{n+1}(x) = f(\lambda^n x) = \lambda^n f(x) = \lambda^n \cdot \lambda x = \lambda^{n+1} x,$$

l'avant-dernière égalité provenant du fait que x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) = \lambda^n x$.

Par conséquent, x étant toujours un vecteur propre associé à λ , on a :

$$0 = f^3(x) - \frac{1}{3}(f^2(x) + f(x) + I(x)) = \lambda^3 x - \frac{1}{3}(\lambda^2 x + \lambda x + x) = \left(\lambda^3 - \frac{1}{3}(\lambda^2 + \lambda + 1) \right) x.$$

Puisque $x \neq 0$ (car c'est un vecteur propre), on en déduit la relation

$$\lambda^3 - \frac{1}{3}(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0.$$

- ii. Les valeurs propres de f sont donc des racines du polynôme P introduit dans la partie I, polynôme dont les racines sont 1 , α et $\bar{\alpha}$. Par conséquent, toute valeur propre λ de f vérifie $\lambda \in \{1, \alpha, \bar{\alpha}\}$.
- iii. Si f est une homothétie, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda I$ (il est nécessaire de considérer uniquement $\lambda \in \mathbb{R}$, et non $\lambda \in \mathbb{C}$, car E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel). Le réel λ est alors nécessairement une valeur propre de f . Ainsi, la seule possibilité est $\lambda = 1$. Donc $f = I$. Réciproquement l'identité vérifie bien la relation.

Ainsi, la seule homothétie vérifiant la relation (2) est l'identité $f = I$.

- iv. Soit f un endomorphisme diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) vérifiant (2). La diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ implique que toutes les valeurs propres de f sont réelles. D'après le résultat précédent, f ne peut alors admettre qu'une valeur propre, égale à 1. Or, un endomorphisme diagonalisable n'ayant qu'une valeur propre est une homothétie.

Ainsi, il n'existe pas d'endomorphisme autre qu'une homothétie vérifiant (2) et diagonalisable.

- (b) • Soit x élément de $\text{Ker}(f - I) \cap \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Alors $f(x) = x$, et

$$0 = 3f(f(x)) + 2f(x) + x = 3f(x) + 2x + x = 6x.$$

Ainsi, $x = 0$. Par conséquent,

$$\text{Ker}(f - I) \cap \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \subset \{0\},$$

et l'inclusion réciproque étant immédiate, on a l'égalité.

Ainsi, la somme $\text{Ker}(f - I) + \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est directe.

• **Analyse :**

Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $y \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et $z \in \text{Ker}(f - I)$ tels que $x = y + z$.

En appliquant $3f^2 + 2f + I$ à cette relation, il vient :

$$(3f^2 + 2f + I)(x) = (3f^2 + 2f + I)(z),$$

et comme $z \in \text{Ker}(f - I)$, $I(z) = f(z) = f^2(z) = z$, donc

$$6z = 3f^2(x) + 2f(x) + x \quad \text{donc:} \quad z = \frac{1}{6}(3f^2(x) + 2f(x) + x) \quad \text{puis:} \quad y = x - z = \frac{1}{6}(5x - 2f(x) - 3f^2(x)).$$

- **Synthèse :** Réciproquement, soit $x \in E$. Posons

$$z = \frac{1}{6}(3f^2(x) + 2f(x) + x) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{6}(5x - 2f(x) - 3f^2(x)),$$

et vérifions que ces valeurs conviennent : On a :

$$* \quad x = y + z$$

$$* \quad (f - I)(z) = \frac{1}{6}(3f^3(x) - 3f^2(x) + 2f^2(x) - 2f(x) + f(x) - x) = \frac{1}{6}(3f^3(x) - f^2(x) - f(x) - x) = 0,$$

d'après la relation (2). Ainsi, $z \in \text{Ker}(f - I)$.

$$* \quad (3f^2 + 2f + I)(y) = 0 \text{ par un calcul du même accabit. Ainsi } y \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I).$$

On a bien prouvé l'existence de $y \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et $z \in \text{Ker}(f - I)$ tels que $x = y + z$. Ainsi

$$E \subset \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \oplus \text{Ker}(f - I).$$

L'inclusion réciproque étant immédiate, on a bien : $E = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \oplus \text{Ker}(f - I)$.

- Par définition de q , $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = \text{Ker}(q)$
- Par ailleurs, soit $y \in \text{Ker}(f - I)$, donc $f(y) = y$. On a alors

$$q(y) = \frac{1}{6}(3f^2(y) + 2f(y) + y) = y.$$

Ainsi, $y \in \text{Im}(q)$. Par conséquent, $\text{Ker}(f - I) \subset \text{Im}(q)$.

D'autre part, d'après le théorème du rang, et d'après la supplémentarité de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = \text{Ker}(q)$ et de $\text{Ker}(f - I)$, il vient :

$$\dim E = \dim \text{Ker}(q) + \dim \text{Im}(q) = \dim \text{Ker}(f - I) + \dim \text{Ker}(q).$$

Par conséquent, $\dim \text{Im}(q) = \dim \text{Ker}(f - I)$.

L'inclusion prouvée plus haut et l'égalité des dimension amène alors : $\text{Im}(q) = \text{Ker}(f - I)$

- Le projecteur q est d'après le cours la projection sur $\text{Im}(q)$ parallèlement à $\text{Ker}(q)$. Ainsi, d'après ce qui précède, q est la projection sur $\text{Ker}(f - I)$ parallèlement à $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

(c) • Soit $y \in \text{Im}(f - I)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = (f - I)(x)$. On a alors

$$(3f^2 + 2f + I)(y) = (3f^2 + 2f + I)(f - I)(x) = (3f^3 - f^2 - f - I)(x) = 0,$$

d'après la relation (2). On en déduit que $y \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

Ainsi, $\text{Im}(f - I) \subset \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

- De même que dans la question précédente, le théorème du rang et la supplémentarité de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et $\text{Ker}(f - I)$ amènent :

$$\dim E = \dim(\text{Im}(f - I)) + \dim(\text{Ker}(f - I)) = \dim(\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)) + \dim(\text{Ker}(f - I)),$$

d'où $\dim(\text{Im}(f - I)) = \dim(\text{Ker}(3f^2 + 2f + I))$.

- L'inclusion et l'égalité des dimensions amène $\boxed{\text{Im}(f - I) = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)}$

Partie III – Étude des solutions de (2)

1. On suppose dans cette question que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 0$.

- Soit e_1 un vecteur non nul de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda e_1 + \mu f(e_1) = 0$.

Si $\mu \neq 0$, alors $f(e_1) = \frac{\lambda}{\mu} e_1$, et donc e_1 est un vecteur propre, associé à une valeur propre réelle. La seule valeur propre réelle étant 1, on en déduit que $e_1 \in \text{Ker}(f - I)$. Ainsi

$$e_1 \in \text{Ker}(f - I) \cap \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = \{0\}.$$

Cela contredit l'hypothèse $e_1 \neq 0$.

Ainsi, $\mu = 0$, puis, de manière immédiate, puisque $e_1 \neq 0$, on obtient $\lambda = 0$.

Ainsi, $\boxed{(e_1, f(e_1)) \text{ est une famille libre.}}$

- De plus, $f(e_1) \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. En effet, $3f^2(e_1) + 2f(e_1) + e_1 = 0$, donc en appliquant f :

$$(3f^2 + 2f + I)(f(e_1)) = 3f^3(e_1) + 2f^2(e_1) + f(e_1) = f \circ (3f^2 + 2f + I)(e_1) = 0,$$

car $e_1 \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Ainsi, $\boxed{f(e_1) \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I).}$

Ainsi, $(e_1, f(e_1))$ est une famille libre de cardinal 2 de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$: $\boxed{\text{cet espace est au moins de dimension 2.}}$

2. On suppose dans cette question que $m = 2$.

D'après la question précédente, la dimension de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est soit 0, soit 2 (ne pouvant pas être plus grande). Comme $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et $\text{Ker}(f - I)$ sont supplémentaires dans E de dimension 2, on obtient les 2 cas suivants :

- **Premier cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 0$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 2$.

Alors, $\text{Ker}(f - I) = E$, donc, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = x$. Ainsi, $f = I$.

La matrice de f dans une base quelconque de $\mathbb{R}^2$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$

- **Deuxième cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 2$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 0$.

Alors $E = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Soit e_1 un vecteur non nul quelconque de $E = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et $e_2 = f(e_1)$.

Alors, d'après la question III-1, (e_1, e_2) est une famille libre, donc (puisque E est de dimension 2) une base de $\mathbb{R}^2$. De plus :

$$* f(e_1) = e_2$$

$$* f(e_2) = f^2(e_1) = -\frac{1}{3}(2f(e_1) - e_1) = -\frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2.$$

Ainsi, la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}.$

Cette dernière matrice M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ d'après la question II-2(a)-iv.

3. On suppose dans cette question que $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 2$.

Soit e_2 un vecteur de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ tel que la famille $(e_1, f(e_1), e_2)$ soit libre. On peut trouver un tel vecteur puisque $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est de dimension au moins 3 (on peut compléter la famille libre $(e_1, f(e_1))$ en une base, donc en particulier trouver un troisième vecteur linéairement indépendant des deux premiers). Supposons que la famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ n'est pas libre. Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 e_2 + \lambda_4 f(e_2) = 0.$$

Puisque $(e_1, f(e_1), e_2)$ est libre, on a nécessairement $\lambda_4 \neq 0$. Quitte à diviser l'identité par $-\lambda_4$, on peut supposer que $\lambda_4 = -1$, donc que :

$$f(e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 e_2.$$

En appliquant $3f$, il vient :

$$3f^2(e_2) = 3\lambda_1 f(e_1) + 3\lambda_2 f^2(e_1) + 3\lambda_3 f(e_2).$$

Comme e_1 et e_2 sont dans $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$,

$$-2f(e_2) - e_2 = 3\lambda_1 f(e_1) - 2\lambda_2 f(e_1) - \lambda_2 e_1 + 3\lambda_3 f(e_2),$$

d'où :

$$(-3\lambda_3 - 2)f(e_2) = -\lambda_2 e_1 + (3\lambda_1 - 2\lambda_2)f(e_1) + e_2.$$

En comparant à la relation initiale donnant $f(e_2)$ en fonction de e_1, e_2 et $f(e_1)$, il vient :

$$(3\lambda_3 + 2)f(e_2) = \lambda_2 e_1 + (2\lambda_2 - 3\lambda_1)f(e_1) - e_2 = \lambda_1(3\lambda_3 + 2)e_1 + \lambda_2(3\lambda_3 + 2)f(e_1) + \lambda_3(3\lambda_3 + 2)e_2.$$

Par liberté de $(e_1, f(e_1), e_2)$, la décomposition ci-dessus est unique, donc

$$\begin{cases} \lambda_2 & = \lambda_1(3\lambda_3 + 2) \\ (2\lambda_2 - 3\lambda_1) & = \lambda_2(3\lambda_3 + 2) \\ -1 & = \lambda_3(3\lambda_3 + 2) \end{cases}$$

De la dernière équation, on tire $3\lambda_3^2 + 2\lambda_3 + 1 = 0$, et comme le polynôme $3X^2 + 2X + 1$ n'admet pas de racine réelle, on aboutit à une contradiction.

Ainsi, la famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est libre.

Le même argument que dans la question III-2 permet de montrer que $f(e_2) \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, donc on a trouvé une famille libre de cardinal 4 de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Ainsi,

$$\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \geq 4.$$

4. On suppose dans cette question que $m = 3$.

Puisque $m = 3$, $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est de dimension au plus 3. D'après les questions III-1 et III-3, les seules dimensions possibles sont 0 et 2 ; comme dans la question III-2, les dimensions correspondantes de $\text{Ker}(f - I)$ sont respectivement 3 et 1.

- **Premier cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 0$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 3$.

Alors $f = I$ et la matrice de f dans une base quelconque de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Deuxième cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 2$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 1$.

Soit $b_1 = e_1 \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et soit $b_2 = f(e_1)$. Alors, (b_1, b_2) est libre, donc une base de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ pour des raisons de dimension. Soit b_3 un vecteur non nul de $\text{Ker}(f - I)$ (donc une base de cet espace de dimension 1). Comme $E = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \oplus \text{Ker}(f - I)$, la famille (b_1, b_2, b_3) est une base de E . Comme dans la question III-2, $f(b_1) = b_2$ et $f(b_2) = f^2(b_1) = -\frac{1}{3}b_1 - \frac{2}{3}b_2$. De plus $f(b_3) = b_3$. Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ d'après la question II-2(a).

5. De même, si $m = 4$, les dimensions possibles de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ sont 0, 2 ou 4. Ainsi :

- **Premier cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 0$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 4$.

Alors $f = I$ et la matrice de f dans une base quelconque de $\mathbb{R}^4$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Deuxième cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 2$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 2$.

Soit $b_1 = e_1 \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et soit $b_2 = f(e_1)$. Alors, (b_1, b_2) est une base de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Soit (b_3, b_4) une base de $\text{Ker}(f - I)$. Alors $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, dans laquelle la matrice de f est :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Troisième cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 4$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 0$. On peut alors trouver $(e_1, e_2) \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ tel que $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ soit une base de E . Comme dans les cas précédents, on a $f(e_2) = -\frac{1}{3}e_2 - \frac{2}{3}f(e_1)$, d'où la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

6. (a) Soit k tel que $2k < \dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

Supposons qu'il existe $(e_1, \dots, e_k)$ tels que $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k))$ est une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre en une base de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ (par ajout d'au moins un vecteur, puisque $2k < \dim(\text{Ker}(3f^2 + 2f + I))$). Soit e_{k+1} l'un des vecteurs ajoutés de la sorte. Alors $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ est une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

(b) On raisonne comme en III-3 pour montrer la liberté de $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1}, f(e_{k+1}))$.

On commence par une remarque qui simplifiera un peu les expressions :

si x est dans $\text{Vect}(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k))$, alors $f(x)$ aussi (immédiat en utilisant la relation (2)).

Notons $F = \text{Vect}(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k))$

Supposons que la famille $(e_1, f(e_1), \dots, e_{k+1}, f(e_{k+1}))$ n'est pas libre. Alors, $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ étant libre, en procédant comme en III-3, il existe un vecteur $x \in F$ et un réel λ tels que

$$f(e_{k+1}) = x + \lambda e_{k+1}.$$

Il vient alors

$$3f^2(e_{k+1}) = 3f(x) + 3\lambda f(e_{k+1}), \quad \text{donc:} \quad -2f(e_{k+1}) - e_{k+1} = 3f(x) + 3\lambda f(e_{k+1}).$$

On obtient donc :

$$(3\lambda + 2)f(e_{k+1}) = -e_{k+1} - 3f(x),$$

puis, en utilisant la relation initiale,

$$(3\lambda + 2)x + (3\lambda + 2)\lambda e_{k+1} = -3f(x) - e_{k+1}.$$

Comme $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ est libre, F et $\mathbb{R}e_{k+1}$ sont en somme directe, d'où l'unicité d'une décomposition en somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}e_{k+1}$. Comme x et $f(x)$ sont dans F , on en déduit que

$$(3\lambda + 2)x = -3f(x) \quad \text{et} \quad (3\lambda + 2)\lambda = -1.$$

De la deuxième équation, on tire $3\lambda^2 + 2\lambda + 1$, ce qui est impossible, le polynôme $3X^2 + 2X + 1$ n'ayant pas de racine réelle.

Ainsi, la famille $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1}, f(e_{k+1}))$ est libre.

Le même raisonnement que déjà fait montre que $f(e_{k+1})$ est un élément de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, donc il s'agit d'une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

(c) Attention, il fallait lire : $q = \lfloor \frac{1}{2} (\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)) + 1 \rfloor$.

Soit, pour tout k dans $\llbracket 0, q \rrbracket$, la propriété $\mathcal{P}(k)$:

« il existe $(e_1, \dots, e_k)$ tel que $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_k, f(e_k))$ soit libre »

L'initialisation est évidente pour $k = 0$. Pour $k = 1$ (si $q \geq 1$) cela découle de la question III-1.

Soit $k \in \llbracket 0, q - 1 \rrbracket$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vrai, et soit $(e_1, \dots, e_k)$ tels que $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k))$ soit une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Comme $k \leq q - 1$, $2k < \dim(\text{Ker}(3f^2 + 2f + I))$, donc, d'après les questions 6(a) et 6(b), il existe e_{k+1} tel que $(e_1, f(e_1), \dots, e_{k+1}, f(e_{k+1}))$ soit une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, d'où $\mathcal{P}(k + 1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout k dans $q - 1$, $\mathcal{P}(k)$ entraîne $\mathcal{P}(k + 1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k dans $\llbracket 0, q \rrbracket$.

En particulier $\mathcal{P}(q)$ est vérifié, d'où l'existence de $(e_1, \dots, e_q)$ tels que $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$ soit une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

(d) Si $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est impair, alors $2q > \dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, d'où une contradiction avec le cardinal de la famille libre trouvée dans la question précédente.

Ainsi, $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est pair.

Dans ce cas, $2q = \dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, donc la famille libre de la question précédente est de cardinal maximal, donc c'est une base :

$(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$ est une base de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

7. Considérons $(b_1, \dots, b_{2q}) = (e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$ la base de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ trouvée plus haut. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $f(b_{2i-1}) = b_{2i}$ et $f(b_{2i}) = -\frac{1}{3}b_{2i-1} - \frac{2}{3}b_{2i}$. Soit $(b_{2q+1}, \dots, b_m)$ une base de $\text{Ker}(f - I)$. Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ est la matrice diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_q & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_{m-2q} \end{pmatrix}$$

8. Réciproquement, soit M la matrice de la question précédente. Alors, d'après les règles de produit matriciel par blocs, si $P(X) = 3X^3 - X^2 - X - 1$,

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & P(A_r) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(I) \end{pmatrix}$$

Or, un calcul rapide montre que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ vérifie la relation $P(A) = 0$, donc on obtient

finalement $3M^3 = M^2 + M + I$.

Correction du problème 2 – (EML 2000)

Dans tout ce problème, a est un réel tel que $0 < a < 1$.

Partie I – Calcul d'une somme et d'une intégrale

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, \pi]$, on note :

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \pi]$. On a, d'après les formules d'Euler :

$$1 + 2C_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{ikx} + e^{-ikx}) = 1 + \sum_{k=1}^n e^{ickx} + \sum_{\ell=-n}^{-1} e^{i\ell x}.$$

Comme $1 = e^{i0x}$, on en déduit que :

$$1 + 2C_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

- (b) Soit $z \neq 1$. D'après la formule de sommation des termes d'une suite géométrique, on a :

$$\sum_{k=-n}^n z^k = \sum_{\ell=0}^{2n} z^{\ell-n} = z^{-n} \sum_{\ell=0}^{2n} z^\ell = \boxed{z^{-n} \frac{1 - z^{2n+1}}{1 - z}}.$$

- (c) Par conséquent, en appliquant cette formule avec $z = e^{ix} \neq 1$ si $x \neq 0$, on obtient :

$$\forall x \in]0, \pi], \quad 1 + 2C_n(x) = e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On en déduit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, \pi]$:

$$\boxed{\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

2. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est continue sur $]0, \pi[$, donc J_n est impropre en 0.

De plus, la fonction f coïncide sur $]0, \pi]$ avec la fonction $\frac{1}{2} + C_n$ qui est définie et continue sur $[0, \pi]$, en tant que somme finie de fonctions continues sur cet intervalle. Ainsi, f se prolonge en une fonction continue sur $[0, \pi]$, et $\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ est faussement impropre}}$ (on aurait aussi pu le montrer en calculant directement la limite de f en 0 à l'aide des équivalents).

On a alors :

$$J_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + 2C_n(x)) \, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kx) \, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} \sin(kx) \right]_0^\pi,$$

et donc $\boxed{J_n = \frac{\pi}{2}}$.

3. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$, en tant que quotient de fonctions qui le sont.

De plus, pour tout $x \in]0, \pi]$,

$$\varphi'(x) = \frac{-a \sin(ax) \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} (\cos(ax) - 1)}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2}.$$

Or, au voisinage de 0, on a :

$$-a \sin(ax) \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} (\cos(ax) - 1) = -a \cdot ax \cdot \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8}\right) \frac{-(ax)^2}{2} + o(x^2) = -\frac{a^2}{4} \cdot x^2 + o(x^2).$$

Ainsi,

$$\varphi'(x) \underset{0}{\sim} -\frac{\frac{a^2}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -a^2.$$

On en déduit que φ' admet une limite finie en 0.

D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction φ restreinte à $]0, \pi]$ se prolonge par continuité en une fonction $\tilde{\varphi}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. On a alors :

$$\tilde{\varphi}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(ax)^2}{\frac{x}{2}} = 0 = \varphi(0).$$

Ainsi, ce prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ est égal à φ sur $[0, \pi]$. Par conséquent, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

En particulier, la dérivée φ' est continue en 0 et :

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = -a^2.$$

4. Soit u et v les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ définies de la manière suivante :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \begin{cases} u(x) &= \varphi(x) \\ v(x) &= -\frac{2}{2n+1} \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) &= \varphi'(x) \\ v'(x) &= \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \end{cases}$$

On a donc :

$$I_n = -\frac{2}{2n+1} \left[\varphi(x) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \right]_0^\pi + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi \varphi'(x) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx.$$

Or, $\varphi(0) = 0$ et $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$, d'où :

$$I_n = \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi \varphi'(x) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx.$$

De plus, pour tout $x \in [0, \pi]$

$$\left| \varphi'(x) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \right| \leq |\varphi'(x)|,$$

et comme φ' est continue, donc intégrable, d'après l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale, on obtient :

$$|I_n| = \left| \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi \varphi'(x) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx \right| \leq \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi \left| \varphi'(x) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \right| dx \leq \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi |\varphi'(x)| dx.$$

L'intégrale ne dépend maintenant plus de n , donc cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Partie II – Calcul de la somme d'une série

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \int_0^\pi \cos(ax) \cos(nx) dx$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(ax) \cos(kx) dx = \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n \cos(ax) \cos(kx) \right) dx,$$

puisque la somme est finie. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n u_k &= \int_0^\pi \cos(ax) C_n(x) dx = \int_0^\pi \left(\frac{\cos(ax) \sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2} \cos(ax) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} I_n + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx - \frac{1}{2a} \left[\sin(ax) \right]_0^\pi.\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2} I_n + J_n}.$$

2. Or, d'après la partie I, $J_n = \frac{\pi}{2}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. Ainsi, la somme partielle de la série de terme général u_n admet une limite, donc $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge}}$, et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{\pi}{2}}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\cos(ax) \cos(nx) = \frac{1}{2} (\cos((a+n)x) + \cos((a-n)x)),$$

donc

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((a+n)x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((a-n)x) dx \\ &= \frac{\sin((a+n)\pi)}{2(a+n)} + \frac{\sin((a-n)\pi)}{2(a-n)} \\ &= \frac{(a-n) \sin((a+n)\pi) + (a+n) \sin((a-n)\pi)}{2(a^2 - n^2)} \\ &= \frac{a(\sin(a+n)\pi + \sin(a-n)\pi) - n(\sin(a+n)\pi - \sin(a-n)\pi)}{2(a^2 - n^2)} \\ &= \frac{a \sin(a\pi) \cos(n\pi) - n \cos(a\pi) \sin(n\pi)}{a^2 - n^2} = \frac{a \sin(a\pi) (-1)^n}{a^2 - n^2}.\end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{u_n = \frac{a \sin(a\pi) (-1)^{n-1}}{n^2 - a^2}}.$

On pouvait aussi trouver le résultat en intégrant 2 fois par parties.

4. On a alors :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2 - a^2} = \frac{2}{\sin(a\pi)} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\frac{1}{a} + \frac{\pi}{\sin(a\pi)}}$$

Partie III – Calcul d'une intégrale

1. Soit $a > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ est impropre en $+\infty$. Or,

$$\frac{1}{1+t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha},$$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $\alpha > 1$. Ainsi, les fonctions

étant positives, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \text{ converge}}$ d'après le théorème de comparaison par équivalences.

2. (a) Soit $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $-t^\alpha \neq 1$, et, d'après la formule de sommation des suites géométriques,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} = \frac{1 - (-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha},$$

et, après simplification :

$$\boxed{\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}}.$$

- (b) Par positivité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt \leq \int_0^1 t^{(n+1)\alpha} dt = \frac{1}{(n+1)\alpha}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)\alpha} = 0$, donc, d'après le théorème d'encadrement, $\left(\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite en $+\infty$, et

$$\boxed{\lim \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt = 0}$$

- (c) De la question III-2(a), on tire :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k\alpha} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^{k\alpha} dt = \frac{1}{k\alpha + 1}$, donc

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1} = G(\alpha) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt.$$

On déduit de la question précédente que cette expression admet une limite en $+\infty$, donc la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$ converge, et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1} = G(\alpha) + \lim \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt \quad \text{soit:} \quad \boxed{G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}}.$$

3. (a) On effectue le changement de variable $u = t^{1-\alpha}$ dans l'intégrale $H(\alpha)$. Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant (car $\alpha > 1$), et bijectif de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$. De plus, $du = (1-\alpha)t^{-\alpha}$. Ainsi l'intégrale $H(\alpha)$ étant convergente, on a :

$$H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-\alpha}}{t^{-\alpha} + 1} dt = -\frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 \frac{du}{1+u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}.$$

On en déduit que

$$\boxed{H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)}.$$

Par conséquent d'après 2(c),

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1} + 1} = \frac{1}{\alpha-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\alpha-1)}{(k+1)\alpha - 1},$$

d'où, après simplifications, et changement d'indice $n = k + 1$,

$$\boxed{H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1}}.$$

(b) On a donc :

$$\begin{aligned}
 F(\alpha) &= G(\alpha) + H(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1} \\
 &= 1 + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n\alpha + 1} + \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1} \right) \\
 &= 1 + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{(-1)^n}{n\alpha + 1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1} \right) \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - n\alpha + n\alpha + 1}{(n\alpha + 1)(n\alpha - 1)},
 \end{aligned}$$

et donc finalement

$$F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2 - 1}.$$

4. D'après II-4, il vient donc, avec $a = \frac{1}{\alpha}$:

$$F(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1} \frac{1}{\alpha}}{n^2 - \frac{1}{\alpha^2}} = 1 + \frac{1}{\alpha} \left(-\alpha + \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \right),$$

et donc finalement :

$$F(\alpha) = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

(Les questions suivantes ne sont pas dans l'épreuve d'EML)

5. • On a $F(2) = \int_0^\pi \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\operatorname{Arctan} t \right]_0^{\lim_{+}\infty} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$

Cela correspond bien à la formule générale, puisque $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

• Le calcul de $F(3)$ se fait par décomposition en éléments simples : déterminons a , b et c tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}.$$

On peut mettre sur le même dénominateur, identifier et résoudre le système, ou alors utiliser différentes astuces. On trouve :

$$a = \frac{1}{3} \quad b = -\frac{1}{3} \quad c = \frac{2}{3}.$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+t} - \frac{1}{6} \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t^2-t+1}.$$

Par conséquent, pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned}
 \int_0^A \frac{1}{1+t^3} &= \frac{1}{3} \left[\ln(1+t) \right]_0^A - \frac{1}{6} \left[\ln(t^2-t+1) \right]_0^A + \frac{1}{2} \int_0^A \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
 &= \frac{1}{6} \ln \frac{(1+A)^2}{A^2-A+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^A \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt \\
 &= \frac{1}{6} \ln \frac{(1+A)^2}{A^2-A+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{2A}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \operatorname{Arctan} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{6} \ln \frac{(1+A)^2}{A^2-A+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{2A}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\pi}{6} \right)
 \end{aligned}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient donc :

$$F(3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}},$$

ce qui correspond bien à la formule générale, puisque $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Enfin, $F\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{\frac{3}{2}}}$.

On effectue le changement de variables $t = u^2$, $dt = 2u du$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, strictement croissant, bijectif de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. On a alors :

$$F\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{2u}{1+u^3} du.$$

On peut reprendre la méthode du calcul de $F(3)$, ou alors (astuce suprême, mais comment y penser tout seul si on ne connaît pas ?) effectuer le changement de variables $u = \frac{1}{x}$ $du = -\frac{dx}{x^2}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, strictement décroissant, bijectif de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi :

$$F\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^3}} \frac{dx}{x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^3+1} dx = 2F(3)$$

et par conséquent ;

$$\boxed{F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}},$$

ce qui encore une fois correspond bien au résultat général, puisque $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Je vous ai épargné le calcul de $F(4)$, qu'on aurait aussi pu faire directement.

6. Une comparaison immédiate à une intégrale de Riemann montre la convergence des intégrales $F_n(\alpha)$, lorsque $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Il s'agit d'adapter la méthode classique par intégrations par parties successives pour le calcul des intégrales $\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$F_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}} dt = F_{n+1}(\alpha) + \int_0^{+\infty} \frac{t \cdot t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}}.$$

On effectue une intégration par parties, en posant, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{cases} u(t) &= t \\ v(t) &= -\frac{1}{n\alpha} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) &= 1 \\ v'(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et uv tend vers 0 en $+\infty$. Ainsi, les deux intégrales intervenant dans l'intégration par partie sont de même nature (donc convergentes), et

$$F_n(\alpha) = F_{n+1}(\alpha) + \left[uv\right]_0^{\lim_{+\infty}} + \frac{1}{n\alpha} F_n(\alpha),$$

et donc :

$$\boxed{F_{n+1}(\alpha) = \frac{n\alpha-1}{n\alpha} F_n(\alpha)}$$

On en déduit, par itération, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$F_n(\alpha) = \frac{((n-1)\alpha-1) \dots (\alpha-1)}{(n-1)! \alpha^{n-1}} F_1(\alpha),$$

et comme $F_1 = F$, on obtient finalement :

$$\boxed{F_n(\alpha) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (k\alpha-1)}{(n-1)! \alpha^n} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}}.$$