Concours Blanc 1 – Épreuve 2 – (DS n° 4)

Correction de l'exercice 1 – (Ecricome 2008)

1. (a) Si $x = 0$, le résultat est immédiat, puisqu'il s'agit de la série nulle.
   Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
   $$f_n(x) = \frac{n+x-n}{n(n+x)} = \frac{x}{n(n+x)},$$
   donc $f_n(x)$ est positif et
   $$f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$
   Or, la série de terme général $\frac{x}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$, donc $\boxed{\text{la série de terme général } f_n(x) \text{ converge}}$, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs par équivalences.

   (b) • On a : $F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0$, d'où $\boxed{F(0) = 0}$.
   • Pour le calcul de $F(1)$, on peut remarquer qu'il s'agit d'une somme télescopique. On calcule donc dans un premier temps la somme partielle. Soit $N \in \mathbb{N}^*$:
   $$\sum_{n=1}^{N} f_n(1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$
   Comme $\frac{1}{N+1}$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, on en déduit que $\boxed{F(1) = 1}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n'(x) = -\frac{1}{(n+x)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.$$
   Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, et comme les deux séries comparées sont à termes négatifs (donc de signe constant), on en déduit que $\boxed{\text{la série de terme général } f_n'(x) \text{ converge}}$.

3. **Étude de la dérivabilité de F**

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[n, +\infty[$, et pour tout $t \in [n, +\infty[$,
   $$\varphi''(t) = \frac{2}{t^3}, \qquad \text{donc:} \qquad |\varphi''(t)| \leqslant \frac{2}{n^3}.$$
   Soit alors $(x, x_0) \in [n, +\infty[^2$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, il vient donc :
   $$\boxed{|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{1}{2!}\frac{2}{n^3}(x-x_0)^2 = \frac{(x-x_0)^2}{n^3}}.$$

   (b) On en déduit dans un premier temps, pour tous $y, y_0 \geqslant n$,
   $$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} + (y - y_0)\frac{1}{y_0^2}\right| \leqslant \frac{(y-y_0)^2}{n^3}.$$
   Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+$. En posant $y_0 = n + x \geqslant 0$ et $y = n + x + h \geqslant 0$, il vient :
   $$\left|\frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n+x} + h\frac{1}{(n+x)^2}\right| \leqslant \frac{h^2}{n^3},$$
   puis
   $$\left|\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) - h\frac{1}{(n+x)^2}\right| \leqslant \frac{h^2}{n^3},$$

c'est-à-dire :

$$|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \leqslant \frac{h^2}{n^3}.$$

Ainsi, comme la série de terme général $\frac{h^2}{n^3}$ est convergente en tant que série de Riemann de paramètre $3 > 1$, on déduit du théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$ converge.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ tel que $x+h \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h) - \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x))\right|,
\end{aligned}$$

et d'après l'inégalité triangulaire, la série de terme général $f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)$ étant absolument convergente,

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \leqslant |h|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Ainsi, en posant K la somme de la série (convergente) de terme général $\frac{1}{n^3}$, on en déduit que pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbb{R}^+$,

$$\boxed{\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K|h|.}$$

(d) D'après le théorème d'encadrement, on en déduit donc que le terme de gauche admet une limite quand h tend vers 0, donc en particulier $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ admet une limite, donc F est dérivable en x. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+}$.
Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = G(x).$$

On en déduit que $\boxed{F' = G}$.

4. **Recherche d'un équivalent en $+\infty$**
Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t(t+x)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$f_{k+1}(x) \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leqslant f_k(x),$$

donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} f_{k+1}(x)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f_k(x)\ \mathrm{d}t,$$

d'où, puisque $f_{k+1}(x)$ et $f_k(x)$ ne dépendent pas de t :

$$\boxed{f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)\ \mathrm{d}t \leqslant f_k(x)}.$$

(b) Soit $n \geqslant 2$.

- En sommant la première inégalité entre 1 et $n-1$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \,\mathrm{d}t = \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \,\mathrm{d}t$$

d'après la relation de Chasles. On a donc

$$\sum_{k=2}^{n} f_k(x) \leqslant \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs $f_1(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$. Ainsi, en ajoutant ce terme de part et d'autre de l'inégalité ci-dessus, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \,\mathrm{d}t.$$

- En sommant la seconde inégalité de la question précédente entre 1 et n, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \,\mathrm{d}t.$$

On a bien obtenu l'encadrement demandé :

$$\boxed{\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \,\mathrm{d}t.}$$

(c) Le calcul des intégrales ci-dessus amène :

$$\ln(n+1) - \ln(x+n+1) + \ln(x+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln n - \ln(x+n) + \ln(x+1),$$

donc

$$\ln\frac{n+1}{x+n+1} + \ln(x+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln\frac{n}{x+n} + \ln(x+1),$$

Or, x étant fixé, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{x+n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{x+n} = 1$, donc, les trois termes de l'encadrement admettant une limite finie, on obtient, par le théorème de prolongement des inégalités :

$$\ln(x+1) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\ln(x+1) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)}$$

(d) En divisant par $\ln(1+x)$, strictement positif pour tout $x>0$, on obtient :

$$\forall x > 0,\ 1 \leqslant \frac{F(x)}{\ln(x+1)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(x+1)} \cdot \frac{x}{x+1}.$$

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln(x+1)} \cdot \frac{x}{x+1} = 1.$$

D'après le théorème d'encadrement on obtient l'existence et la valeur de la limite suivante :

$$\lim \frac{F(x)}{\ln(x+1)} = 1.$$

Ainsi :

$$F(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln x,$$

puisque $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = o(\ln(x))$ (négligeabilité d'un terme de limite nulle devant un terme de limite infinie). Ainsi :

$$\boxed{F(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x).}$$

Correction de l'exercice 2 – (Ecricome 1996)

Désignant par n un entier naturel, on se propose de déterminer l'ensemble des polynômes $P(X)$ à coefficients réels tels que

$$P(X) + P(X+1) = 2X^n \tag{1}$$

1. *On considère l'application Φ qui, à tout élément $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, associe le polynôme :*

$$\Phi[Q(X)] = Q(X) + Q(X+1).$$

(a)
- Tout d'abord, l'espace des polynômes étant stable par composition et par somme, Φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$.
- Soit P, Q deux polynômes, et λ un réel. Alors :

$$\begin{aligned}\Phi[\lambda P(X) + Q(X)] &= \lambda P(X) + Q(X) + \lambda P(X+1) + Q(X+1) \\ &= \lambda(P(X) + P(X+1)) + (Q(X) + Q(X+1)) = \lambda\Phi[P(X)] + \Phi[Q(X)].\end{aligned}$$

Ainsi, Φ est linéaire.

L'application Φ étant une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$.

(b) Notant p un entier naturel, on désigne par Φ_p la restriction de Φ à $\mathbb{R}_p[X]$.

i. La restriction d'une application linéaire étant encore linéaire, il suffit de montrer que Φ_p est à valeurs dans $\mathbb{R}_p[X]$, autrement dit que $\mathbb{R}_p[X]$ est stable par Φ.
Soit $Q \in \mathbb{R}_p[X]$. Alors

$$\deg Q(X) = \deg Q(X+1) \leqslant p,$$

donc, d'après les régles sur le degré d'une somme

$$\deg(\Phi[Q(X)]) \leqslant \max(\deg(Q(X)), \deg(Q(X+1))) \leqslant p.$$

Ainsi, $\Phi[Q(X)] \in \mathbb{R}_p[X]$. Cet espace est donc stable par Φ, et donc Φ_p est à valeurs dans $\mathbb{R}_p[X]$.
On en déduit que $\boxed{\Phi_p \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_p[X].}$

ii. Soit $k \in [\![0, p]\!]$. On a

$$\Phi_p(X^k) = X^k + (X+1)^k = X^k + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i = 2X^k + R(X),$$

où $\deg R \leqslant k-1$. Ainsi, R se décompose sur les $k-1$ premiers vecteurs de la base canonique. On en déduit que le vecteur colonne des coordonnées de $\Phi_p(X^k)$ dans la base $\mathcal{B}_p$ est :

$$[\Phi_p(X^k)]_{\mathcal{B}_p} = \begin{pmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

les croix représentant des coefficients quelconques, et le 2 étant la $k+1$-ième coordonnée (attention au décalage, la première coordonnée correspondant à X^0)
Ainsi, la matrice de Φ_p dans la base $\mathcal{B}_p$ s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}(\Phi_p) = \begin{pmatrix} 2 & \times & \cdots & \times \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}(\Phi_p) \text{ est triangulaire supérieures, à coefficients diagonaux tous égaux à 2.}}$

iii. Cette matrice est inversible, en tant que matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls. Par conséquent, $\boxed{\Phi_p \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_p[X].}$

(c) • Injectivité : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$, et soit $p = \deg(P)$. Alors $P \in \mathbb{R}_p[X]$, et $\Phi_p(P) = \Phi(P) = 0$, donc $P \in \mathrm{Ker}(\Phi_p) = \{0\}$, puisque Φ_p est injective. Donc $P = 0$.
Par conséquent, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$, donc Φ est injective.

• Surjectivité : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et p son degré. Puisque Φ_p est surjective, P admet un antécédent Q dans $\mathbb{R}_p[X]$ par Φ_p. Ainsi, $\Phi(Q) = \Phi_p(Q) = P$. Ainsi, Φ est surjective.

On en déduit que Φ est un endormorphisme bijectif, donc $\boxed{\Phi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}[X].}$

(d) Un polynôme Q vérifie la relation (1) si et seulement s'il est un antécédent par Φ du polynôme $2X^n$. Puisque Φ est un endomorphisme, cet antécédent existe et est unique.
Ainsi, $\boxed{\text{il existe un polynôme unique de } \mathbb{R}[X]\text{, noté } E_n(X)\text{, vérifiant la relation (1).}}$
Par ailleurs, puisque $2X^n$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$, $E_n(X)$ est aussi l'image réciproque de $2X^n$ par Φ_n, donc $E_n(X) \in \mathbb{R}_n[X]$. En revanche, $E_n(X) \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$, car, par la propriété de stabilité montrée en 1(b), $\Phi(\mathbb{R}_{n-1}[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Ainsi, $\boxed{\deg(E_n(X)) = n}$.

2. On écrit :

$$E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k.$$

(a) On a, d'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
E_n(X+1) + E_n(X) &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(X+1)^k + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_{n,k} \binom{k}{j} X^j \right) + \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} X^j \\
&= \sum_{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} a_{n,k} \binom{k}{j} X^j + \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} X^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{n,k} \binom{k}{j} X^j + \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} X^j,
\end{aligned}$$

et en regroupant les deux sommes, on obtient bien :

$$\boxed{E_n(X+1) + E_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k} \right] X^j}.$$

(b) On obtient donc l'égalité :

$$2X^n = \sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k} \right] X^j.$$

La famille $(1, X, \dots, X^n)$ étant libre, on peut procéder à une identification des coefficients, et les $a_{n,k}$ sont donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \forall j \in [\![0, n-1]\!], \quad a_{n,j} + \displaystyle\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k} = 0 \\ a_{n,n} + \displaystyle\sum_{k=n}^{n} \binom{k}{n} a_{n,k} = 2 \end{cases} \quad \text{soit:} \quad \boxed{\begin{cases} \forall j \in [\![0, n-1]\!], \quad a_{n,j} + \displaystyle\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k} = 0 \\ 2a_{n,n} = 2 \end{cases}}$$

En particulier, $\boxed{a_{n,n} = 1}$.

(c) • On a $\deg(E_0) = 0$, donc $\boxed{E_0 = a_{0,0} = 1}$

- On a $\deg(E_1) = 1$, donc $E_1 = a_{1,0} + a_{1,1}X = a_{1,0} + X$.
  Par ailleurs, la ligne correspondant à $j = 0$ dans le système de la question précédente amène

$$a_{1,0} + \sum_{k=0}^{1} \binom{k}{0} a_{n,k} = 0 \qquad \text{soit:} \qquad a_{1,1} + 2a_{1,0} = 0 \qquad \text{donc:} \qquad a_{1,0} = -\frac{1}{2}.$$

  Ainsi $\boxed{E_1(X) = X - \frac{1}{2}}$
- De même, on a à résoudre le système

$$\begin{cases} a_{2,0} + \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{k}{0} a_{2,k} = 0 \\ a_{2,1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \binom{k}{1} a_{2,k} = 0 \\ a_{2,2} = 1 \end{cases} \qquad \text{soit:} \qquad \begin{cases} 2a_{2,0} + a_{2,1} + a_{2,2} = 0 \\ 2a_{2,1} + 2a_{2,2} = 0 \\ a_{2,2} = 1 \end{cases}$$

  On obtient de façon immédiate $a_{2,2} = 1$, $a_{2,1} = -1$ et $a_{2,0} = 0$. Ainsi

$$\boxed{E_2(X) = X^2 - X = X(X-1)}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$

- Si $n = 0$, l'expression n'est pas bien définie, mais on s'en sort par une pirouette en disant que par convention, n étant nul, $nE_{n-1}(X) = 0$ (même si $En - 1(X)$ n'est pas défini). Cela correspond également à l'expression de $E_0'(X)$.
  Cette « erreur » ou imprécision de l'énoncé n'est pas de mon fait : l'énoncé était posé comme cela dans le sujet initial.
- Si $n > 0$, on obtient, par dérivation de l'égalité définissant E_n :

$$E_n'(X) + E_n'(X+1) = 2nX^{n-1}, \qquad \text{donc:} \qquad \frac{1}{n}E_n'(X) + \frac{1}{n}E_n'(X+1) = 2X^{n-1}.$$

  On en déduit que $\frac{1}{n}E_n'$ satisfait l'équation définissant E_{n-1}. Par unicité de la solution de cette équation, on en déduit que $\frac{1}{n}E_n' = E_{n-1}$, donc $\boxed{E_n' = nE_{n-1}}$.

En itérant cette relation, il vient, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ (le cas $k = 0$ se vérifie trivialement)

$$\boxed{E_n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)E_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}E_{n-k}.}$$

Si $k > n$, la considération des degrés donne immédiatement $E_n^{(k)} = 0$.

(e)
- Soit $F_n(X) = (-1)^n E_n(1-X)$. On a alors

$$F_n(X) + F_n(X+1) = (-1)^n(E_n(1-X) + E_n(-X)) = (-1)^n 2(-X)^n,$$

  en composant l'égalité définissant E_n par le polynôme $-X$. Ainsi,

$$F_n(X) + F_n(X+1) = 2X^n,$$

  et par unicité de la solution de cette équation,

$$\boxed{E_n(X) = F_n(X) == (-1)^n E_n(1-X)}.$$

- Soit n pair strictement positif. L'équation définissant E_n et l'égalité trouvée ci-dessus, évaluées en 0, donnent le système :

$$\begin{cases} E_n(0) + E_n(1) = 0 \\ E_n(0) = (-1)^n E_n(1) = E_n(1) \end{cases}$$

  On en déduit que $\boxed{E_n(0) = E_n(1) = 0}$.

- Soit n un entier impair. L'égalité obtenue en début de question, évaluée en $\frac{1}{2}$, donne :

$$E_n\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n E_n\left(\frac{1}{2}\right) = -E_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ainsi, $\boxed{E_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$.

(f) Je ne sais pas faire sans la question suivante (rectifiée)

(g) Toute la question est fausse.

La propriété exacte est la suivante (bien au contraire de ce que j'ai énoncé) : si n est pair, 0 et 1 sont les seules racines dans $[0,1]$, et si n est impair, $\frac{1}{2}$ est la seule racine dans $[0,1]$.

Les propriétés de multiplicité et d'existence d'autres racines deviennent caduques. On peut néanmoins montrer facilement que les racines ci-dessus sont nécessairement simples.

Cela se montre par récurrence sur n.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « si n est pair, 0 et 1 sont les seules racines dans $[0,1]$, et si n est impair, $\frac{1}{2}$ est la seule racine dans $[0,1]$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

La propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit n tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- Si n est pair, alors 0 et 1 sont les seules racines de P dans $[0,1]$. Par continuité de E_n, il découle du théorème des valeurs intermédiaires que E_n est de signe constant sur $[0,1]$, strict sur $]0,1[$. Puisque $E'_{n+1} = (n+1)E_n$, on en déduit que E_{n+1} est strictement monotone sur $[0,1]$, donc injective. Ainsi, il a au plus une racine sur $[0,1]$. Comme $\frac{1}{2}$ est racine, c'est la seule.
- Si n est impair, alors $\frac{1}{2}$ est la seule racine de E_n est $\frac{1}{2}$.
  - ∗ Si E_n ne change pas de signe en cette racine, alors d'arpès le théorème des valeurs intermédiaires, il est de signe constant (strict sauf en $\frac{1}{2}$) sur $[0,1]$, et E_{n+1} est strictement croissant, ce qui contredit $E_{n+1}(0) = E_{n+1}(1) = 0$.
  - ∗ Ainsi, E_n change de signe en $\frac{1}{2}$, et est de signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, 1]$, strictement sauf en $\frac{1}{2}$. Ainsi, E_{n+1} est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$, ou bien l'inverse. Comme $E_{n+1}(0) = E_{n+1}(1) = 0$, cela empêche l'existence d'autres racines dans $[0,1]$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié.

Par ailleurs, si n est pair, 0 et 1 ne sont pas racines de E_{n-1} donc de E'_{n-1}, donc 0 et 1 sont racines simples de E_n. Le même argument montre que si n est impair, $\frac{1}{2}$ est racine simple de E_n.

(h) Comme E_3 admet $\frac{1}{2}$ comme racine, et est unitaire, il existe a et b tels que

$$E_3 = (X - \frac{1}{2})(X^2 + aX + b).$$

On a $E_3(0) + E_3(1) = 0$, d'où $a = -1$.

On a $E_3(-1) + E_3(0) = -2$, d'où $b = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{E_3 = (X - \frac{1}{2})(X^2 - X - \frac{1}{2})}$

Comme E_4 admet 0 et 1 comme racines et est unitaire, il existe a et b tels que

$$E_4 = X(X-1)(aX^2 + bX + c).$$

On a $E_4(1) + E_4(2) = 2$, donc $2a + b = -3$

On a $E_4(-1) + E_4(0) = 2$ donc $b - a = 0$

Ainsi, $a = b = -1$, et $\boxed{E_4 = X(X-1)(X^2 - X - 1)}$.

Correction du problème – (Ecricome 2009, adapté et complété)

Partie I – Temps d'attente de la première boule blanche

1. On peut tirer des boules noires tant qu'il y en a dans l'urne. À chaque fois qu'on tire une boule noire, il en reste une de moins dans l'urne. Donc on peut tirer au maximum b boules noires. Ainsi, La première boule blanche est tirée au plus tard lors du tirage $b+1$. De plus, a étant non nul, on peut tirer une boule blanche dès le rang initial. Ainsi, $\boxed{Y(\Omega) = [\![1, b+1]\!]}$.
2. Soit $k \in [\![1, b+1]\!]$. L'événement $[Y = k]$ est réalisé si et seulement si on a tiré des boules noires lors des $k-1$ premiers tirages, et une boule blanche lors du k-ième tirage. Ainsi, avec les notations introduites en début de partie II,
$$[Y = k] = \bigcap_{i=1}^{k-1} N_i \cap \overline{N_k}.$$
Le contenu de l'urne étant modifié en cours d'expérience, modification dépendant du résultat des tirages, les tirages ne sont pas indépendants. Il faut donc utiliser la formule des probabilités composées :
$$P(Y = k) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)\cdots P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-2}}(N_{k-1})P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(N_k).$$
Or, à l'issue de i tirages, si on n'a tiré que des boules noires, l'urne contient $a+i$ boules blanches et $b-i$ boules noires. Ainsi :
$$P(Y = k) = \frac{b}{N}\cdot\frac{b-1}{N}\cdots\frac{b-(k-2)}{N}\cdot\frac{a+(k-1)}{N},$$
et finalement : $\boxed{P(Y = k) = \dfrac{b!(a+k-1)}{(b-k+1)!N^k}}$
3. En particulier,
$$\boxed{P(Y = b+1) = \frac{b!N}{N^{b+1}} = \frac{b!}{N^b}}.$$
Par ailleurs, pour tout $k \in [\![1, b]\!]$
$$\frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k} = \frac{b!}{(b-k+1)N^k}(N-(b-k+1)) = \frac{b!}{(b-k+1)N^k}(a+k-1).$$
On retrouve bien :
$$\boxed{P(Y = k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}}.$$
4. Soient M un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \dots, a_M$ une famille de réels. On a :
$$\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1}-a_k) = \sum_{k=1}^{M} ka_{k-1} - \sum_{k=1}^{M} ka_k = \sum_{k=0}^{M-1}(k+1)a_k - \sum_{k=1}^{M} ka_k = a_0 + \sum_{k=1}^{M-1}(k+1-k)a_k - Ma_M.$$
Après simplification de la somme, on constate qu'on peut réintégrer le terme a_0 dans cette somme, et on obtient bien :
$$\boxed{\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1}-a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right) - Ma_M}.$$
5. La variable Y étant finie, elle admet une espérance. En posant pour tout $k \in [\![0, b]\!]$, $a_k = \dfrac{b!}{(b-k)!N^k}$, et $a_{b+1} = 0$, on obtient, d'après la question 3,
$$E(Y) = \sum_{k=1}^{b+1} k(a_{k-1}-a_k) = \left(\sum_{k=0}^{b} a_k\right) - (b+1)a_{b+1},$$
d'où $\boxed{E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k}}$

Partie II – Espérance du nombre de boules noires tirées

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - Le réel $p_{n,0}$ est la probabilité de ne tirer aucune boule noire lors des n premiers tirages. Lorsqu'on ne tire pas de boule noire, on ne modifie pas le contenu de l'urne, donc, d'après la formule des probabilités composées :
   $$p_{n,0} = P(\overline{N_1} \cap \cdots \cap \overline{N_n}) = P(\overline{N_1})P_{\overline{N_1}}(\overline{N_2}) \ldots P_{\overline{N_1} \cap \cdots \cap \overline{N_{n-1}}}(\overline{N_n}) = \boxed{\left(\frac{a}{N}\right)^n = p_{n,0}}.$$
   - La probabilité $p_{n,n}$ est la probabilité de ne tirer que des boules noires. Le calcul effectué en I(2) s'adapte (en oubliant la dernière étape), et on obtient
   $$\boxed{p_{n,n} = \begin{cases} \dfrac{b!}{(b-n)!N^n} & \text{si } n \leqslant b \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}}$$
   puisqu'on ne peut pas tirer plus de b boules noires, puisqu'elles ne sont pas remises dans l'urne.
   - On a $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$, donc
   $$\boxed{1 = \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}}.$$
2. **Calcul de l'espérance de X_n**
   (a) Pour que $[X_{n-1} = k]$ soit non quasi-impossible, il faut restreindre un peu plus les valeurs de k, en considérant $k \in [\![0, \min(b, n-1)]\!]$. Dans les autres cas, la loi conditionnelle n'est pas définie.
   Soit donc $k \in [\![0, \min(b, n-1)]\!]$. Sachant qu'au bout de $n-1$ tirages, on a obtenu k boules noires, on peut en obtenir éventuellement une de plus en procédant au n-ième tirage. Ainsi, sachant $[X_{n-1} = k]$, la variable X_n prend ses valeurs dans $\{k, k+1\}$, et
   $$\boxed{P(X_n = k \mid X_{n-1} = k) = P(\overline{N_n} \mid X_{n-1} = k) = \frac{a+k}{N}},$$
   puisque l'urne contient alors $a+k$ boules blanches et $b-k$ boules noires à l'issue du $n-1$-ième tirage. De même
   $$\boxed{P(X_n = k+1 \mid X_{n-1} = k) = P(N_n \mid X_{n-1} = k) = \frac{b-k}{N}}.$$
   (b) Les variables éatnt finies, toutes les espérances existent, et
   $$E(X_n \mid X_{n-1} = k) = kP(X_n = k \mid X_{n-1} = k) + (k+1)P(X_n = k+1 \mid X_{n-1} = k) = \frac{k(a+k)}{N} + \frac{(k+1)(b-k)}{N}.$$
   On développe et on simplifie, on obtient alors :
   $$\boxed{E(X_n \mid X_{n-1} = k) = \frac{k(a+b-1)+b}{N} = k\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{b}{N}}.$$
   (c) Puisque $X_{n-1}(\Omega) = [\![0, \min(b, n-1)]\!]$, on obtient, à l'aide de la formule de l'espérance totale appliquée au système complet $[X_{n-1} = k]$, $k \in [\![0, \min(b, n-1)]\!]$ (pas de problème de convergence ici, les variables étant finies) :
   $$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^{\min(b,n-1)} E(X_n \mid X_{n-1} = k)P(X_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\min(b,n-1)} \left(k\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{b}{N}\right) P(X_{n-1} = k) \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{k=1}^{\min(b,n-1)} kP(X_{n-1} = k) + \frac{b}{N} \sum_{k=0}^{\min(b,n-1)} P(X_{n-1} = k). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.}$$

(d) C'est le calcul d'une suite définie par récurrence. Il n'y a pas de paramètre à fournir, toutes les variables ayant une valeur imposée par l'énoncé.

```
function esperance:real;
var i:integer;
    E:real;
begin
  E:=0;    {initialisation avec l'esperance de X_0}
  for i:=1 to 2009 do
    E:= 99/100*E + 10/100;
  esperance:=E;
end;
```

(e) Vous avez bien sûr reconnu une suite arithmética-géométrique. Le point fixe de la relation est c tel que

$$c = \left(1 - \frac{1}{N}\right) c + \frac{b}{N} \qquad \text{soit:} \qquad c = b.$$

Ainsi, $(E(X_n) - b)$ est géométrique de raison $1 - \dfrac{1}{N}$, et de terme initial au rang 0 égal à $-b$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_n) - b = -b\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{E(X_n) = b\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).}$$

3. **Calcul de q_n**

(a) On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet $[X_n = k]$, $k \in [\![0, \min(n, b)]\!]$, constitué d'événements non quasi-impossibles. Alors

$$q_{n+1} = P(N_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\min(n,b)} P(N_{n+1} \mid X_n = k)P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{\min(n,b)} \frac{b-k}{N} p_{n_k}.$$

Ainsi, en mutlipliant par N, et en remarquant que $p_{n,k} = 0$ si $k > b$, on obtient :

$$\boxed{Nq_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (b-k)p_{n,k}.}$$

(b) Ainsi,

$$q_{n+1} = \frac{1}{N}\left(b\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) - \sum_{k=0}^{N} kP(X_n = k)\right) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{q_{n+1} = \frac{b}{N} - \frac{E(X_n)}{N}.}$$

En remplaçant par l'expression trouvée pour $E(X_n)$, il vient :

$$\boxed{q_{n+1} = b\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}$$

Partie III – Variance de X_n et covariance du couple (X_n, X_{n+1})

1. **Calcul du moment d'ordre 2 de X_n**

(a) On utilise le théorème de transfert appliqué à la loi conditionnelle de X_n sachant $[X_{n-1}=k]$. On obtient donc

$$E(X_n(X_n-1)\mid X_{n-1}=k)=k(k-1)\frac{a+k}{N}+(k+1)k\frac{b-k}{N}=\boxed{\frac{(N-2)k^2+(b-a)k}{N}}$$

On en déduit, par utilisation de la formule de l'espérance totale que :

$$E(X_n(X_n-1))=\left(1-\frac{2}{N}\right)\sum_{k=0}^{\min(n-1,b)}k^2P(X_{n-1}=k)+\frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{\min(n-1,b)}kP(X_{n-1}=k),$$

et donc :

$$\boxed{E(X_n(X_n-1))=\left(1-\frac{2}{N}\right)E(X_{n-1}^2)+\frac{b-a}{N}E(X_{n-1})}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}E(X_n(X_n-1))&=\left(1-\frac{2}{N}\right)E(X_{n-1}(X_{n-1}-1))+\frac{a+b-2}{N}E(X_{n-1})+\frac{b-a}{N}E(X_{n-1})\\&=\left(1-\frac{2}{N}\right)E(X_{n-1}(X_{n-1}-1))+\frac{2(b-1)}{N}E(X_{n-1}).\end{aligned}$$

En remplaçant $E(X_{n-1})$ par son espression trouvée en II-2(e), il vient donc

$$\boxed{E(X_n(X_n-1))=\left(1-\frac{2}{N}\right)E(X_{n-1}(X_{n-1}-1))+\frac{2b(b-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right)}.$$

(b) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$E(X_n(X_n-1))=b(b-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right).$$

.

La propriété $\mathcal{P}_0$ équivaut à $E(X_0(X_0-1))=0$, ce qui est vrai, puisque X_0 est la variable certaine nulle. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors, d'après la question précédente

$$\begin{aligned}E(X_{n+1}(X_{n+1}-1))&=\left(1-\frac{2}{N}\right)E(X_n(X_n-1))+\frac{2b(b-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)\\&=b(b-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)+\frac{2b(b-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)\end{aligned}$$

Après développement et simplification sans difficulté, on obtient bien

$$E(X_{n+1}(X_{n+1}-1))=b(b-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1}-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right)$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2. D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\begin{aligned}V(X_n)&=E(X_n^2)-E(X_n)^2=E(X_n(X_n-1))-E(X_n)^2+E(X_n)\\&=b(b-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)-b^2\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)^2+b\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)\end{aligned}$$

On développe, on simplifie, et on obtient :

$$\boxed{V(X_n)=b(b-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n+b\left(1-\frac{1}{N}\right)^n-b^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2}.$$

3. **Covariance du couple** (X_n, X_{n+1})

   (a) D'après le théorème de transfert, puis la définition des probabilités conditionnelles, en enfin la définition des espérances conditionnelles, il vient :

$$\begin{aligned}
E(X_nX_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{\min(n,b)} \sum_{\ell=0}^{\min(n+1,b)} k\ell P(X_n = k, X_{n+1} = \ell) \\
&= \sum_{k=0}^{\min(n,b)} kP(X_n = k) \sum_{\ell=0}^{\min(n+1),b} \ell P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = k) \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{\min(n,b)} kP(X_n = k)E(X_{n+1} \mid X_n = k).}
\end{aligned}$$

   (b) D'après l'expression de $E(X_{n+1} \mid X_n = k)$ trouvée en 2(b), on obtient :

$$E(X_nX_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\min(n,b)} kP(X_n = k)\left(k\left(1-\frac{1}{N}\right)+\frac{b}{N}\right) = \boxed{\left(1-\frac{1}{N}\right)E(X_n^2)+\frac{b}{N}E(X_n)}.$$

   (c) Ainsi,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_n, X_{n+1}) &= E(X_nX_{n+1}) - E(X_n)E(X_{n+1}) \\
&= \left(1-\frac{1}{N}\right)E(X_n^2)+\frac{b}{N}E(X_n) - E(X_n)\left(\left(1-\frac{1}{N}\right)E(X_n)+\frac{b}{N}\right),
\end{aligned}$$

   d'après la question II-2(c). On obtient donc :

$$\boxed{\operatorname{cov}(X_n, X_{n+1}) = \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(E(X_n^2)-E(X_n)^2\right)}.$$

   D'après la formule de König-Huygens, on en déduit que $\boxed{\operatorname{cov}(X_n, X_{n+1}) = \left(1-\frac{1}{N}\right)V(X_n).}$

   (d) Une variance étant toujours positive, $\operatorname{cov}(X_n, X_{n+1})$ est positive, ce qui est logique : si on a tiré beaucoup de boules noires lors des n premiers tirages, on en aura aussi beaucoup lors des $n+1$ premiers tirages.

4. **Généralisation au calcul de** $\operatorname{cov}(X_n, X_{n+\ell})$.

   (a) En supposant que $[X_n = k]$ est réalisé, la composition de l'urne à l'issue des n premiers tirages est de $a+k$ boules blanches et $b-k$ boules noires.

   Soit pour tout m, Y_m la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées lors de m tirages, avec les conditions initiales suivantes : l'urne contient initialement $a+k$ boules blanches et $b-k$ boules noires. Alors sachant que $X_n = k$ est réalisé, $X_{n+\ell}$ est égal à $k+Y_\ell$ (le nombre de boules noires déjà tirées, plus le nombre de boules noires qu'on tire lors des ℓ tirages suivants). Il vient donc :

$$\boxed{E(X_{n+\ell} \mid X_n = k) = k + E(Y_\ell) = k + (b-k)\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^\ell\right)}.$$

   (b) On raisonne alors comme dans la question 3(a) :

$$E(X_nX_{n+\ell}) = \sum_{k=0}^{\min(n,b)} kP(X_n = k)E(X_{n+\ell} \mid X_n = k) = \sum_{k=0}^{\min(n,b)} kP(X_n = k)\left(k+(b-k)\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^\ell\right)\right),$$

   d'où, d'après le théorème de transfert,

$$\boxed{E(X_nX_{n+\ell}) = \left(1-\frac{1}{N}\right)^\ell E(X_n^2) + b\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^\ell\right)E(X_n).}$$

(c) Cette relation découle de la résolution des suites arithmético-géométriques, mais en revenant uniquement jusqu'au rang n et non jusqu'au rang 0. Donnons rapidement l'argument. Comme nous l'avons déjà vu, $(E(X_n) - b)$ est une suite géométrique de raison $1 - \dfrac{1}{N}$ donc

$$(E(X_{n+\ell}) - b) = (E(X_n) - b)\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\ell},$$

d'où :

$$\boxed{E(X_{n+\ell}) = b + (E(X_n) - b)\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\ell}.}$$

(d) On en déduit enfin que

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_n, X_{n+\ell}) &= E(X_n Xn + \ell) - E(X_n)E(X_{n+\ell}) \\
&= \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\ell} E(X_n^2) + b\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\ell}\right) E(X_n) - E(X_n)\left(b + (E(X_n) - b)\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\ell}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\ell} (E(X_n^2) - E(X_n)^2),
\end{aligned}$$

et en utilisant la formule de König-Huygens :

$$\boxed{\operatorname{cov}(X_n, X_{n+\ell}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\ell} V(X_n)}$$

Partie IV – Simulation informatique

Dans la fonction suivante, Na désigne le nombre courant de boules blanches, Nb le nombre courant de boules noires. Ces valeurs sont actualisées à chaque tirage. La variable X compte le nombre de boules noires tirées.
Pour que cette fonction fonctionne correctement, le début du corps du programme doit comporter l'instruction `randomize;`

```
function cb(a,b,n:integer):integer;
var Na,Nb,X,k:integer;
begin
  Na:=a;
  Nb:=b;
  X:=0;
  for k:=1 to n do
    begin
      if random (Na+Nb) < Nb     {condition d'obtention d'une boule noire}
      then
       begin
         X:=X+1;
         Na:=Na+1;
         Nb:=Nb-1;
       end;
  cb:=X;
end;
```

Je propose une autre version, récursive, basée sur la remarque faite lors de la question III-4(a) : si lors du premier tirage on tire une boule blanche, on recommence la même opération, avec les mêmes conditions initiales, mais un tirage de moins, et la valeur de X_n est le nombre de boules noires obtenues lors de ces $n-1$ tirages. Si on tire une boule noire, de même, mais avec les conditions initiales $(a+1, b-1)$, et il faut rajouter 1 (la première boule) au nombre de boules tirées lors des $n-1$ tirages suivants. Cela donne le programme suivant.

```
function cbbis(a,b,n:integer):integer;
begin
  if n=0 then cbbis:=0
  else
    begin
      if random(a+b) < b then cbbis:= cbbis(a+1,b-1,n-1)+1
                         else cbbis:= cbbis(a,b,n-1);
    end;
end;
```