Correction Devoir Surveillé n° 5

La correction du problème viendra plus tard, puisque vous aurez à refaire ce problème pendant les vacances...

Correction de l'exercice 1 – Exercice technique

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ (il n'est pas précisé dans l'énoncé si la diagonalisation doit se faire sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, donc je prends le plus large possible). Le complexe λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas une matrice inversible. Nous recherchons donc le rang de $A - \lambda I_3$ à l'aide d'un pivot de Gauss, que nous présentons sous forme algorithmique, les transformations successives étant représentées par des flèches.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & -4 \\ -2 & 4-\lambda & 4 \\ 2 & -3 & -3-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3-\lambda \\ -2 & 4-\lambda & 4 \\ 3-\lambda & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \big(L_1 \leftrightarrow L_3\big)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 3-3\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} L_2 & \leftarrow & L_2 + L_1 \\ L_3 & \leftarrow & 2L_3 - (3-\lambda)L_1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} = M_\lambda \qquad \big(L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2\big)$$

Ainsi, la matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement si la matrice M_λ obtenue à l'issue de la réduction de Gauss est non inversible, si et seulement si (puisque cette dernière est triangulaire) un des coefficients diagonaux de M_λ est nul, si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$ (les racines du polynôme $-2 + 3X - X^2$ étant 1 et 2). Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}.}$

- Étude du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1.
  Le sous-epace propre E_1 est le noyau de la matrice $A - \lambda I_3$, donc le noyau de la matrice M_1, les opérations de Gauss sur les lignes préservant le noyau. Or,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Cette matrice est de rang 1, donc, d'après le théorème du rang, son noyau est de dimension 2. Ainsi, $\boxed{\dim E_1 = 2}$.
  Puisque E_2 est au moins de dimension 1, et que la somme des dimensions des espaces propres ne peut pas excéder 3, on a nécessairement $\dim E_2 = 1$. On peut alors d'ores et déjà affirmer que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$, puisque $\dim E_1 + \dim E_2 = 3$.
  De plus, les colonnes de M_1 vérifient les relations $3C_1 + 2C_2 = 0$ et $2C_1 + C_3 = 0$. Ainsi, les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans E_1. Comme ces deux vecteurs sont linéairement indépendants et que $\dim E_1 = 2$, on en déduit que $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1}$

- Étude du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

  De même, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  Les colonnes de M_1 vérifient $C_1 - C_2 + C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \in \end{pmatrix} E_2$. Comme $\dim E_2 = 1$, on obtient :

$$\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Ainsi, $\boxed{\text{en posant } P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ on a } A = PDP^{-1}.}$

2. (a) On peut bien sûr calculer A^2 et exprimer A^2 en fonction de A et I_3. On peut aussi se servir de la diagonalisation de la question précédente : en effet,

$$(D - I_3)(D - 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

donc $D^2 - 3D + 2I_3 = 0$, donc

$$A^2 - 3A + 2I_3 = PDP^{-1}PDP^{-1} - 3PDP^{-1} + 2PP^{-1} = P(D^2 - 3D + 2I_3)P^{-1} = 0.$$

Ainsi, $\boxed{X^2 - 3X + 1 \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un polynôme Q, et un polynôme $R = aX + b$ de degré au plus 1 tel que

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + R = (X - 1)(X - 2)Q + aX + b.$$

En évaluant cette relation en 1 et en 2, il vient :

$$\begin{cases} 1 & a + b \\ 2^n & = 2a + b \end{cases}$$

On en déduit facilement que

$$\begin{cases} a & = 2^n - 1 \\ b & = -2^n + 2 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + (2^n - 1)X + (-2^n + 2).}$

En spécialisant en A, du fait que $X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A, on obtient :

$$\boxed{A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3}.$$

Vous pouvez vérifier rapidement que pour $n = 0$, on retrouve l'identité, pour $n = 1$, on retrouve la matrice A, et pour $n = 2$, on retrouve le polynôme annulateur de A. Ces vérifications élémentaires permettent de détecter les petites erreurs de calcul ou de signe. Ne vous en privez pas !

3. La matrice A est inversible car $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

   Par ailleurs on trouve facilement l'inverse de A en utilisant le polynôme annulateur, en isolant I_3 et en mettant A en facteur dans le reste de l'expression : cela donnc

$$I_3 = -\frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A = A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}\right)A.$$

Ainsi, $\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}}$

Cette méthode utilisant le polynôme annulateur pour trouver l'inverse est à retenir. Elle est très efficiace, et utilisable dès lors qu'on connait un polynôme annulateur dont le terme constant est non nul.

Pour le calcul de A^{-n}, on extrapole la formule de A^n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$B_n = (2^{-n} - 1)A + (2 - 2^n)I_3.$$

Vérifions que B_n est bien l'inverse de A^n :

$$\begin{aligned}
A^nB_n = B_nA^n &= ((2^{-n} - 1)A + (2 - 2^{-n})I_3)((2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3) \\
&= (2^{-n} - 1)(2^n - 1)A^2 + ((2^{-n} - 1)(2 - 2^n) + (2^n - 1)(2 - 2^{-n}))A + (2 - 2^{-n})(2 - 2^n)I_3 \\
&= (2 - 2^n - 2^{-n})A^2 + (-6 + 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n)A + (5 - 2 \cdot 2^{-n} - 2 \cdot 2^n)I_3 \\
&= 2(A^2 - 3A + 2I_3) - 2^n(A^2 - 3A + 2I_3) - 2^{-n}(A^2 - 3A + 2I_3) + I_3 \\
&= I_3.
\end{aligned}$$

Ainsi, B_n est bien l'inverse de A^n, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{A^{-n} = (2^{-n} - 1)A + (2 - 2^{-n})I_3}$$

Remarquez que cet argument est aussi valable pour $n = 1$, et redone donc l'expression de A^{-1}.

Correction de l'exercice 2 – (d'après ESC 1999)

1. (a) • Si l'urne contient initialement une seule boule, alors elle est tirée dès le premier tirage, et l'urne est vidée dès le premier tirage. Ainsi, $\boxed{X_1 = 1}$, c'est-à-dire, X_1 est la variable certaine égale à 1. On a donc $\boxed{E(X_1) = 1}$

   • Si l'urne contient deux boules, numérotées 1 et 2, soit on tire la boule 1, et on retire donc toutes les boules de l'urne et le jeu s'arrête là, soit on tire la boule 2, et il reste une boule pour le deuxième tirage. L'urne est alors nécessairement vidée à l'issue du deuxième tirage. Ainsi, $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$, et $[X_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si on tire la boule 1 au premier tirage. Ainsi

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

   On a donc $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(2)}$, donc $\boxed{E(X_2) = \frac{3}{2}}$.

   (b) De même, si l'urne contient initialement 3 boules

   • On peut tirer dès le premier tirage la boule 1 et le jeu s'arrête là.

   • On peut tirer la boule 2, dans ce cas, il reste 1 boule pour le deuxième tirage, et le jeu s'arrête au bour de 2 tirages.

   • On peut tirer d'abord la boule 3, et il reste alors 2 boules dans l'urne : soit on tire ensuite la boule 1 et le jeu s'arrête au deuxième tirage, soit on tire la boule 2, et on peut effectuer un troisième tirage, qui est nécessairement le dernier, puisqu'il ne reste plus qu'une boule.

   Ainsi, $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$, et

   • l'événement $[X_3 = 1]$ est réalisé si et seulement si on tire la boule 1 au premier tirage, donc

$$P(X_3 = 1) = P(N_1 = 1) = \frac{1}{3}$$

   • L'événement $[X_3 = 3]$ est réalisé siet seulement si on tire la boule 3 puis la boule 2 puis la boule 1. Ainsi

$$P(X_3 = 3) = P([N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]).$$

D'après la formule des probabilités composées, on a alors :

$$P(X_3 = 1) = P(N_1 = 3)P_{[N_1=3]}(N_2 = 2)P_{[N_1=3]\cap[N_2=2]}(N_1 = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6},$$

car lors des trois tirages, on a dans cette configuration, respectivement 3, 2 et 1 seule boule dans l'urne, avec équiprobabilité des tirages.

- On a alors $P(X_3 = 2) = 1 - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{P(X_3 = 1) = \frac{1}{3},\ P(X_3 = 2) = \frac{1}{2},\ P(X_3 = 3) = \frac{1}{6}, \text{ et } E(X_3) = \frac{1}{3} + \frac{2}{2} + \frac{3}{6} = \frac{11}{6}.}$

2. Soit maintenant n quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

(a) Dans le meilleur des cas, on tire la boule 1, et le jeu s'arrête à l'issue du premier tirage. Dans le pire des cas, on ne retire qu'une boule à chaque fois (ce qui revient à tirer à chaque étape la boule de numéro maximal), et on effectue donc n tirages. Ainsi, $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles : soit $k \in [\![2, n-1]\!]$, on peut alors tirer d'abord la boule k, (il reste alors $k - 1$ boules dans l'urne), puis pour chacun des tirages suivantes, tirer le plus grand numéro restant (donc retirer une seule boule à chaque étape). On effectue bien k tirages pour vider l'urne. Ainsi, $\boxed{X_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$

(b) • L'événement $[X_n = 1]$ est réalisé si et seulement si on vide l'urne en 1 tirage, donc si et seulement si on tire la boule 1 au premier tirage. Les tirages étant équiprobables, on a

$$\boxed{P(X_n = 1) = \frac{1}{n}}$$

- L'événement $[X_n = n]$ est réalisé si et seulement si on ne retire qu'une seule boule à chaque tirage, ce qui, comme on l'a dit plus haut, revient à tirer le plus grand numéro restant. Ainsi

$$P(X_n = n) = P([N_1 = n] \cap [N_2 = n-1] \cap \cdots \cap [N_{n-1} = 2] \cap [N_n = 1]).$$

D'après la formule des probabilités composées, l'événement $[N_1 = n] \cap [N_2 = n-1] \cap \cdots \cap [N_{n-1} = 2]$ n'étant pas quasi-impossible,

$$P(X_n = n) = P(N_1 = n)P_{[N_1=n]}(N_2 = n-1) \cdots P_{[N_1=n]\cap\cdots\cap[N_{n-1}=2]}(N_n = 1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,$$

car dans cette configuration, l'urne perd exactement une boule à chaque étape. Ainsi :

$$\boxed{P(X_n = n) = \frac{1}{n!}}$$

(c) De façon évident, les tirages étant équiprobables, $\boxed{N_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(n), \text{ donc } E(N_1) = \frac{n+1}{2}.}$

(d) Soit $i \in [\![2, n]\!]$, et $k \in [\![2, n]\!]$.

- Si $i \leqslant k - 1$, et $[N_1 = i]$ est réalisé, il reste au plus $k - 2$ boules dans l'urne à l'issue du premier tirage, donc on effectue au plus $k - 2$ autres tirages, en plus du premier. Ainsi, On effectue en tout au plus $k - 1$ tirage, et l'événement $[X_n = k]$ ne peut donc pas être réalisé. Donc $P(X_n = k \mid N_1 = i) = 0$.
- Si $i \geqslant k$, à l'issue du premier tirage, il reste $i - 1$ boules dans l'urne, numérotées de 1 à $i - 1$. L'événement $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement si on effectue exactement $k - 1$ tirages après le premier pour vider l'urne. Or, à l'issue du premier tirage, l'urne contient $i - 1$ boules numérotées de 1 à $i-1$. Ainsi, on est dans les conditions initiales de l'expérience définissant X_{i-1}. Par conséquent, vider l'urne en exactement $k - 1$ tirages à partir du deuxième tirage est un événement de même probabilité que $[X_{i-1} = k - 1]$. Ainsi,

$$P(X_n = k \mid N_1 = i) = P(X_{i-1} = k - 1).$$

On a bien obtenu :

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \quad \forall k \in [\![2, n]\!], \quad \boxed{P(X_n = k \mid N_1 = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant k - 1 \\ P(X_{i-1} = k - 1) & \text{si } i \geqslant k. \end{cases}}$$

- Si $i = 1$, donc si $[N_1 = 1]$ est réalisé, alors l'expérience s'arrête au premier tirage, et X_n prend la valeur 1. Ainsi :

$$\boxed{P(X_n = k \mid N_1 = 1) = \begin{cases} 0 & \text{si k >1} \\ 1 & \text{si k=1.} \end{cases}}$$

- De même, si $[N_1 = i]$ est réalisé, alors $[X_1 = 1]$ ne peut pas être réalisé, sauf si $i = 1$, et dans ce cas $[X_1 = 1]$ est réalisé de façon certaine. Ainsi :

$$\boxed{P(X_n = 1 \mid N_1 = i) = \begin{cases} 0 & \text{si i >1} \\ 1 & \text{si i=1.} \end{cases}}$$

3. (a) Soit $k \in [\![2, n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $\{[N_1 = i], i \in [\![1, n]\!]\}$, constitué d'événement non quasi-impossibles, on a :

$$P(X_n = k) = \sum_{i=1}^{n} P(N_1 = i) P(X_n = k \mid N_1 = i).$$

D'après la question précédente, et du fait que N_1 suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, on obtient :

$$\boxed{P(X_n = k) = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{n} P(X_{i-1} = k-1) = \frac{1}{n} \sum_{i=k-1}^{n-1} P(X_i = k-1)}.$$

(b) En particulier,

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P(X_i = 1) = \boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}},$$

d'après 2(b). On ne peut pas simplifier davantage cette somme.

(c) Soit $n \geqslant 2$, et $v_n = n! P(X_n = n-1)$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)! P(X_{n+1} = n) - n! P(X_n = n-1) \\ &= \frac{(n+1)!}{n+1} \sum_{i=n-1}^{n} P(X_i = n-1) - n! P(X_n = n-1), \\ &= n! \sum_{i=n-1}^{n-1} P(X_i = n-1) \\ &= n! P(X_{n-1} = n-1) = \frac{n!}{(n-1)!} = n, \end{aligned}$$

d'après la question 2(b). Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $\boxed{v_{n+1} - v_n = n}$. De plus, d'après 2(b) :

$$v_2 = 2! P(X_2 = 1) = 1.$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant 2$

$$v_n = v_2 + \sum_{i=2}^{n-1} i = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On en déduit alors que $\boxed{P(X_n = n-1) = \frac{1}{2(n-2)!}}$

4. (a) Toutes les espérances de cet exercice existent, car les variables aléatoires sont finies.

- Si $n = 1$, alors $[N_1 = 1]$ est l'événement certain, et X_n est la variable certaine égale à 1. Par ailleurs, X_0 (qui n'est pas très bien défini) correspondrait au nombre de tirages nécessaires pour vider une urne déjà vide, donc on peut poser par convention que X_0 est la variable certaine égale à 0. On a alors

$$E(X_1 \mid N_1 = 1) = E(X_1) = 1 = E(X_0) + 1.$$

Donc l'égalité est satisfaite pour $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 2$, et $i \in [\![1, n]\!]$. On a alors

$$E(X_n \mid N_1 = i) = \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k \mid N_1 = i)$$

  $*$ Si $i \in [\![2, n]\!]$, d'après la question 2(d), on obtient

$$E(X_n \mid N_1 = i) = \sum_{k=2}^{i} kP(X_{i-1} = k-1) = \sum_{k=1}^{i-1}(k+1)P(X_{i-1} = k) = \sum_{k=1}^{i-1} kP(X_{i-1} = k) + \sum_{k=1}^{i-1} P(X_{i-1} = k).$$

  Puisque $X_{i-1}(\Omega) = [\![1, i-1]\!]$, on obtient bien, par définition de l'espérance, et d'après les propriétés d'une loi de probabilité :

$$\boxed{E(X_n \mid N_1 = i) = E(X_{i-1}) + 1.}$$

  $*$ Si $i = 1$, alors d'après 2(d), seul un terme de la somme ci-dessus est non nul, et

$$E(X_n \mid N_1 = 1) = P(X_n = 1 \mid N_1 = 1) = 1 = E(X_0) + 1,$$

  avec la convention adoptée plus haut pour X_0. Donc l'égalité est encore vérifiée dans ce cas.

(b) Soit $n \geqslant 2$. D'après la formule de l'espérance totale (valable ici car les variables aléatoires sont finies, ainsi que le systme complet utilisé)

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} P(N_1 = i)E(X_n \mid N_1 = i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(E(X_{i-1}) + 1)$$

En effectuant un changement d'indice, et en remarquant que $E(X_0) = 0$, il vient

$$E(X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(E(X_i) + 1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 1.$$

On obtient finalement $\boxed{E(X_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i)\right) + 1.}$

Ainsi

$$\begin{aligned} nE(X_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + n \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} E(X_i) + n - 1 + E(X_{n-1}) + 1 \\ &= (n-1)E(X_{n-1}) + E(X_{n-1}) + 1 = nE(X_{n-1}) + 1. \end{aligned}$$

En divisant par n, cela donne bien :

$$\boxed{E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}}.$$

(c) Nous obtenons donc, par itération, pour tout $n \geqslant 1$

$$E(X_n) = E(X_1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k},$$

et donc : $\boxed{E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

5. (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
   - Cas où $k = 1$. Le premier tirage a toujours lieu, donc N_k ne peut pas prendre la valeur 0. On a déjà vu que N_1 suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, donc $N_1(\Omega) = [\![1,]\!]$.

- Si $k > 1$, alors l'urne peut avoir été vidée aux tirages précédents, et dans ce cas, N_k prend la valeur 0. Par ailleurs, on a retiré au moins $k-1$ boules lors des $k-1$ tirages précédents, donc il reste au plus $n-k+1$ boules, dont les numéros n'exèdent pas $n-k+1$. Donc N_k prend des valeurs inférieures ou égales à $n-k+1$. Enfin, il est possible qu'il reste exactement $k-1$ boules au début du k-ième tirage, si les premiers tirages ont amené respectivement les boules n, $n-1$, $n-2$ etc. Dans ce cas, on peut obtenir pour N_k n'importe quelle valeur de 1 à $n-k+1$. Ainsi, $\boxed{N_k(\Omega) = [\![0, n-k+1]\!].}$

(b) Soit $k \in [\![2, n]\!]$ et $i \in [\![2, n-k+2]\!]$. Sachant que $N_{k-1} = i]$ est réalisé, il reste $i-1$ boules numérotées de 1 à $i-1$ dans l'urne, au début du k-ième tirage. Les tirages s'effectuant avec équiprobabilité, sous cette condition, N_k suit donc une loi uniforme sur $[\![1, i-1]\!]$, donc une loi $\mathcal{U}(i-1)$.
On en déduit donc sans calcul que

$$\boxed{E(N_k \mid N_{k-1} = i) = \frac{i-1+1}{2} = \frac{i}{2}.}$$

Si $i = 1$, donc si $[N_{k-1} = 1]$ est réalisé, le k-ième tirage n'a pas lieu, donc N_k prend la valeur 0. Ainsi

$$\boxed{E(N_k \mid N_{k-1} = 1) = 0}$$

Pour la question suivante, on a aussi besoin du cas $i = 0$, qui se fait pas le même raisonnement (si le $k-1$-ième tirage n'a pas lieu, le k-ième non plus !). Ainsi

$$\boxed{E(N_k \mid N_{k-1} = 0) = 0}$$

(c) D'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet $[N_{k-1} = i]$, $i \in [\![0, n-k+2]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
E(N_k) &= \sum_{i=0}^{n-k+2} P(N_{k-1} = i) E(N_k \mid N_{k-1} = i) \\
&= \sum_{i=2}^{n-k+2} P(N_{k-1} = i) E(N_k \mid N_{k-1} = i) \\
&= \sum_{i=2}^{n-k+2} \frac{i}{2} P(N_{k-1} = i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-k+2} i P(N_{k-1} = i) - \frac{1}{2} P(N_{k-1} = 1) \\
&= \frac{1}{2} E(N_{k-1}) - \frac{1}{2} P(N_{k-1} = 1).
\end{aligned}$$

Or, l'événement $[N_{k-1} = 1]$ est réalisé si et seulement si on a procédé au $k-1$-ième tirage, et qu'on tire la boule 1 à ce tirage (ce qui consiste à vider l'urne), donc si $[X_n = k-1]$ est réalisé. Ainsi $P(N_{k-1} = 1) = P(X_n = k-1)$ et donc

$$\boxed{E(N_k) = \frac{1}{2} E(N_{k-1}) - \frac{1}{2} P(X_n = k-1)}.$$

D'après la question 5(a), $N_n(\Omega) = [\![0, 1]\!] = \{0, 1\}$. D'après la remarque ci-dessus et la question 2(b),

$$P(N_n = 1) = P(X_n = n) = \frac{1}{n!}.$$

Ainsi, $\boxed{N_n \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{n!}}$ donc $\boxed{E(N_n) = \frac{1}{n!}}$
Par ailleurs, le $n+1$-ième tirage n'a pas lieu (il ne peut pas rester de boule à ce moment, puisqu'on retire au moins une boule à chaque tirage). Donc N_{n+1} est la variable nulle, d'où $E(N_{n+1}) = 0$.
Toujours d'après la question 2(b), on a alors :

$$\frac{1}{2} E(N_n) - \frac{1}{2} P(X_n = n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{n!} \right) = 0 = E(N_{n+1}).$$

Donc l'égalité prouver plus haut est encore valable lorsque $k = n+1$.

(d) Il s'agit d'une itération. Elle est un peu plus compliquée que les précédentes, donc nous effectuons une récurrence.

Soit, pour tout k dans $[\![1, n+1]\!]$, la propriété $\mathcal{P}(k)$:

$$E(N_k) = \frac{1}{2^{k-1}} E(N_1) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-k} P(X_n = j)$$

La propriété $\mathcal{P}(1)$ est trivialement vraie (la somme étant vide, donc nulle)

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vrai. Alors, d'après la question 6, puisque $k+1 \in [\![2, n+1]\!]$ (et qu'on a vérifié que la relation est aussi valable pour $n+1$)

$$E(N_{k+1}) = \frac{1}{2} E(N_k) - \frac{1}{2} P(X_n = k).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient alors :

$$\begin{aligned} E(N_{k+1}) &= \frac{1}{2^k} E(N_1) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-k} P(X_n = j) - \frac{1}{2} P(X_n = k) \\ &= \frac{1}{2^k} E(N_1) - \sum_{j=1}^{k} 2^{j-(k+1)} P(X_n = j). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vérifiée.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ entraîne $\mathcal{P}(k+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k dans $[\![1, n+1]\!]$.

On a donc montré que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\boxed{E(N_k) = \frac{1}{2^{k-1}} E(N_1) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-k} P(X_n = j).}$$

(e) En particulier, pour $k = n+1$, on a $E(N_{n+1}) = 0$, donc

$$\sum_{j=1}^{n} 2^{j-(n+1)} P(X_n = j) = \frac{1}{2^n} E(N_1),$$

donc

$$\sum_{j=1}^{n} 2^j P(X_n = j) = 2E(N_1) = n+1.$$

On en déduit donc, d'après le théorème de transfert, que

$$\boxed{E(2^{X_n}) = n+1}.$$

6. On a alors par linéarité de l'espérance, et en utilisant la question 5(c) :

$$\begin{aligned}
E(S) &= \sum_{k=1}^{n} E(N_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} E(N_1) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-k} P(X_n = j) \\
&= \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} - \sum_{j=1}^{n-1} P(X_n = j) \sum_{k=j+1}^{n} 2^{j-k} \\
&= n+1 - \frac{n+1}{2^n} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} P(X_n = j) \sum_{\ell=0}^{n-j-1} \frac{1}{2^\ell} \\
&= n+1 - \frac{n+1}{2^n} - \sum_{j=1}^{n-1} P(X_n = j) \left(1 - \frac{1}{2^{n-j}}\right) \\
&= n+1 - \frac{n+1}{2^n} - \sum_{j=1}^{n} P(X_n = j) \left(1 - \frac{1}{2^{n-j}}\right) \\
&= n+1 - \frac{n+1}{2^n} - \sum_{j=1}^{n} P(X_n = j) + \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n} 2^j P(X_n = j) \\
&= n+1 - \frac{n+1}{2}^n - 1 + E(2^{X_n}),
\end{aligned}$$

d'après le théorème de transfert. On obtient donc finalement :

$$\boxed{E(S) = n - \frac{n+1}{2^n} + \frac{1}{2^n} E(2^{X_n})}$$

Ainsi, d'après l'expression de $E(2^{X_n})$ obtenue en 5(e), il vient

$$\boxed{E(S) = n}$$

7. Commençons par le calcul de $E(N_k N_{k-1}$. D'après le théorème de transfert,

$$E(N_k N_{k-1}) = \sum_{i=0}^{n-k+2} \sum_{j=0}^{n-k+1} ij P([N_{k-1} = i] \cap [N_k = j]) = \sum_{i=0}^{n-k+2} \sum_{j=0}^{n-k+1} ij P(N_{k-1} = i) P(N_k = j \mid N_{k-1} = i).$$

D'après la définition de l'espérance conditionnelle, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
E(N_k N_{k-1}) &= \sum_{i=0}^{n-k+2} i P(N_{k-1} = i) E(N_k \mid N_{k-1} = i) \\
&= \sum_{i=2}^{n-k+2} \frac{i^2}{2} P(N_{k-1} = i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-k+2} i^2 P(N_{k-1} = i) - \frac{1}{2} P(N_{k-1} = 1) \\
&= \frac{1}{2} E(N_{k-1}^2) - \frac{1}{2} P(X_n = k-1).
\end{aligned}$$

On obtient donc, en utilisant 5(c) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(N_k, N_{k-1}) &= E(N_k N_{k-1}) - E(N_k) E(N_{k-1}) \\
&= \frac{1}{2} E(N_{k-1}^2) - \frac{1}{2} P(X_n = k-1) - \frac{1}{2} E(N_{k-1})(E(N_{k-1}) - P(X_n = k-1) \\
&= \boxed{\frac{1}{2} V(N_{k-1}) + \frac{1}{2}(E(N_{k-1} - 1) P(X_n = k-1)}.
\end{aligned}$$

Montrer, en utilisant 5(b) et 5(c), que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\operatorname{cov}(N_{k-1}, N_k) = \frac{1}{2}V(N_{k-1}) + \frac{1}{2}(E(N_k) - 1)P(X_n = k).$$

8. Simulation informatique

   (a)
```
procedure simuleXS(n:integer; var X,S:integer);
var i:integer;
begin
  S:=0;
  X:=0;
  repeat
    i:= random(n)+1;       {tirage}
    S:=S+i;
    X:=X+1;
    n:=i-1;               {nouveau contenu de l'urne}
  until
    n:=0;                 {on s'arrete quand l'urne est vide}
end;
```

   (b) On utilise dans cette fonction la procédure écrite précédemment

```
function covarianceXS(n:integer):real;
var X,S:integer;
    EX,ES,EXS: longint;       {attention, integer n'est pas suffisant ici}
begin
  EX:=0;
  ES:=0;
  EXS:=0
  for i:=1 to 10000 do
   begin
     simuleXS(n,X,S);         {une simulation}
     EX:=EX+X;
     ES:=ES+S;
     EXS:=EXS+X*S;
   end;
 covariance:= EXS/ (10000*10000) - (EX/10000)*(ES/10000);
end;
```