Concours Blanc 2 – Épreuve de mathématiques (DS 7)

Correction de l'exercice 1 – (d'après Ecricome 2010)

1. Étude de f.

(a) • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors P' et P'' sont des polynômes, donc $f(P)$ est un polynôme en tant que produit et somme de polynômes. De plus, $\deg P \leqslant n$, donc $\deg P' \leqslant n-1$ et $\deg P'' \leqslant n-2$, ainsi que $\deg XP' \leqslant n$. Ainsi, $\deg f(P) \leqslant n$. Donc f est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)'' - 4X(\lambda P + Q)' = \lambda P'' + Q'' - 4\lambda XP' - 4XQ' = \lambda f(P) + f(Q).$$

Ainsi, f est une application linéaire.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

(b) On a :

• $f(1) = 0 - 4X \cdot 0$, donc $\boxed{f(1) = 0}$

• $f(X) = 0 - 4X \cdot 1$, donc $\boxed{f(X) = -4X}$

• pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\boxed{f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 4kX^k}$.

La matrice de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc :

$$\boxed{A_n = \mathrm{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\cdot 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3\cdot 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -8 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & n(n-1) \\ 0 & & & 0 & -4(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -4n \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{La matrice } A_n \text{ est bien triangulaire supérieure.}}$

(c) Les valeurs propres de f sont les valeurs propres de A_n. La matrice A_n étant triangulaire, ses valeurs propres sont égales à ses coefficients diagonaux. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{0, -4, -8, \dots, -4n\} = \{-4k, \quad k \in [\![0, n]\!]\}}$.

L'endomorphisme f (d'un espace de dimension $n+1$) admettant $n+1$ valeurs propres, $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$. De plus, chaque espace propre étant de dimension au moins égale à 1, et la somme des dimensions ne pouvant pas excéder $n+1$, $\boxed{\text{tous les espaces propres sont de dimension 1 exactement.}}$

(d) • Soit λ une valeur propre de f, et P un vecteur propre associé. On a alors :

$$P'' - 4XP' = \lambda P.$$

Soit $d = \deg P$. Alors en identifiant les termes de degré d dans l'égalité ci-dessus, il vient :

$$0 - 4d = \lambda \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\lambda = -4 \deg P}$$

• Soit P un vecteur propre associé à la valeur propre $-4n$ (qui est bien valeur propre d'après la question (c)). Alors P est de degré n d'après ce qui précède, et en notant a son coefficient dominant $H_n = \frac{P}{a}$ est unitaire, et est encore un vecteur propre associé à $-4n$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe bien un polynôme unitaire } H_n \text{ de degré } n \text{ vérifiant } f(H_n) = -4nH_n.}$

• Soit H_n et K_n deux polynômes unitaires de degré n vérifiant la relation $f(H_n) = -4nH_n$ et $f(K_n) = -4nK_n$. Alors H_n et K_n sont tous deux dans l'espace propre associé à $-4n$. Cet espace propre étant de dimension 1 d'après (c), H_n et K_n sont colinéaires. Comme ils sont non nuls, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \lambda K_n$. Comme ils sont tous les deux unitaires, l'identification de leurs coefficients dominants (du terme de degré n) donne $\lambda = 1$, donc $H_n = K_n$. D'où $\boxed{\text{l'unicité de } H_n.}$

2. Étude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) L'équation $(\mathcal{E}_n)$ s'écrit :

$$H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n.$$

En dérivant cette équation polynomiale, il vient :

$$H_n^{(3)} - 4XH_n'' - 4H_n' = -4nH_n',$$

donc

$$(H_n')'' - 4X(H_n')' = -4(n-1)H_n', \text{ c'est-à-dire } \boxed{f(H_n') = -4(n-1)H_n'}$$

Ainsi, H_n' appartient à l'espace propre associé à $-4(n-1)$. Cet espace propre est de dimension 1, et contient le polynôme unitaire (donc non nul) H_{n-1}. Ainsi, il existe un réel μ tel que $H_n' = \mu H_{n-1}$. Comme H_n est unitaire de degré n, par dérivation, H_n' est de degré $n-1$, de coefficient dominant égal à n. Ainsi, par identification des coefficients dominants dans l'égalite $H_n' = \mu H_{n-1}$, il vient $\mu = n$. Ainsi, $\boxed{H_n' = nH_{n-1}.}$

On a alors

$$-4nH_n = H_n'' - 4XH_n' = nH_{n-1}' - 4nXH_{n-1} = n(n-1)H_{n-2} - 4nXH_{n-1}.$$

En divisant par $-4n$, il vient donc :

$$\boxed{H_n = XH_{n-1} - \frac{n-1}{4}H_{n-2}}.$$

(b)
- Le polynôme H_0 est unitaire de degré 0, donc $\boxed{H_0 = 1}$
- Le polynôme H_1 est unitaire de degré 1. Il s'écrit donc $H_1 = X + a$. Un calcul direct amène alors $f(H_1) = -4X$. Comme $f(H_1) = -4H_1$, on en déduit que $\boxed{H_1 = X}$.
- On a alors
$$H_2 = XH_1 - \frac{2-1}{4}H_0 \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{H_2 = X^2 - \tfrac{1}{4}}$$
- De même :
$$H_3 = XH_2 - \frac{2}{4}H_1 = X^2 - \frac{X}{4} - \frac{X}{2} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{H_3 = X^3 - \tfrac{3}{4}X}.$$

(c) Calcul classique d'une suite récurrente d'ordre 2.

```
program ecricome2010exo2;

var u,v,w:real;
    n:integer;

begin
  u:=1; v:=1;
  for n:=2 to 2010 do
    w:= v - (n-1)* u/4;
    u:=v;
    v:=w;
  writeln('u_2010=",v);
end.
```

3. Application aux points critiques d'une fonction à trois variables

(a) Par définition de U, $F = \mathbb{R}^3 \setminus U = F_1 \cup F_2 \cup F_3$, où

$$F_1 = \{(x,y,z) \mid x = y\}, \quad F_2 = \{(x,y,z) \mid x = z\} \qquad \text{et} \qquad F_3 = \{(x,y,z) \mid y = z\}.$$

Or, la fonction $g : (x,y,z) \mapsto x - y$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonction polynomiale, et $F_1 = g^{-1}(\{0\})$. Comme $\{0\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$, on en déduit que F_1 est fermé. De la même manière F_2 et F_3 sont fermés. Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}^2 \setminus U \text{ est l'union de 3 sous-ensembles fermés}}$. C'est donc un fermé.

Son complémentaire $\boxed{U \text{ est donc ouvert}}$.

(b) V est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, en tant que somme et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Le gradient de V est donné par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \nabla V(X) = \begin{pmatrix} 2x - \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z} \\ 2y - \frac{1}{y-x} - \frac{1}{y-z} \\ 2z - \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y} \end{pmatrix}$$

La valeur absolue ne gêne pas pour la dérivation ici : une dérivée de $x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$ (sans valeur absolue). Cette formule est d'ailleurs mieux connue dans le sens de la primitivation.

On déduit du calcul de ∇V que $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ est un point critique de V si et seulement si

$$\begin{cases} 2\alpha - \frac{1}{\alpha-\beta} - \frac{1}{\alpha-\gamma} & = 0 \\ 2\beta - \frac{1}{\beta-\alpha} - \frac{1}{\beta-\gamma} & = 0 \\ 2\gamma - \frac{1}{\gamma-\alpha} - \frac{1}{\gamma-\beta} & = 0 \end{cases}$$

En multipliant la première égalité par $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$, et en effectuant des opérations similaires sur les deux autres, ce système est équivalent à

$$\begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) & = (\alpha-\gamma) + (\alpha-\beta) \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) & = (\beta-\alpha) + (\beta-\gamma) \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) & = (\gamma-\alpha) + (\gamma-\beta). \end{cases}$$

Ainsi, (α, β, γ) est point critique de V si et seulement si

$$(\mathcal{S}) : \boxed{\begin{cases} 2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) & = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) & = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) & = 2\gamma - \alpha - \beta. \end{cases}}$$

(c) On introduit le polynôme $Q(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$. On a alors :

$$Q'(X) = (X-\beta)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\beta) \qquad \text{puis:} \qquad Q''(X) = 2(X-\alpha) + 2(X-\beta) + 2(X-\gamma).$$

Ainsi :

$$Q''(X) - 4XQ'(X) = 6X - 2(\alpha+\beta+\gamma) - 4X\left((X-\beta)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\beta)\right)$$

On constate alors que

$$Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = 4\alpha - 2\beta - 2\gamma - 4\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$$

Ainsi, l'équation $Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = 0$ est à un facteur 2 près la première équation du système $(\mathcal{S})$.
De même, dire que β et γ sont racines de $Q''(X) - 4XQ'(X)$ équivaut aux équations 2 et 3 de $(\mathcal{S})$.
Ainsi $\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \text{ si et seulement si } Q'' - 4xQ' \text{ admet pour racines } \alpha, \beta \text{ et } \gamma.}$

(d) Supposons que (α, β, γ) est un point critique. Alors $Q'' - 4XQ'$ est un polynôme de degré 3, admettant les trois racines α, β et γ. Par conséquent, il existe un réel μ tel que

$$Q'' - 4XQ' = \mu(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = \mu Q.$$

Ainsi, Q est un vecteur propre de f. Comme $\deg Q = 3$, la valeur propre associée est -12 d'après 1(d). Ainsi

$$\boxed{Q'' - 4XQ' = 12Q},$$

De plus, Q est unitaire, et d'après 1(d), H_3 est le seul polynôme unitaire vérifiant cette égalité. Donc $\boxed{Q = H_3}$.

On a calculé H_3 en $2(b)$. On a donc

$$Q(X) = X^3 - \frac{3}{4}X = X(X - \frac{\sqrt{3}}{2})(X + \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Comme α, β et γ sont les trois racines de Q (dans un ordre quelconque), on obtient tous les points critiques en permutant de toutes les façons possibles les coordonnées 0, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\boxed{\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{-\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)}.$$

Réciproquement, ces points sont bien solutions du système (vérification immédiate)

4. Étude d'un extremum de V. Soit U' le sous- ensemble de U constitué des points (x,y,z) vérifiant $x<y<z$.
   (a) Le seul point critique vérifiant les inégalités définissant U' est $\boxed{A=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$
   (b) Le calcul des dérivées secondes de V amène la hessienne suivante :

$$\forall X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad \nabla^2V(X)=\begin{pmatrix}2+\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(x-z)^2)} & -\frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-z)^2}\\ -\frac{1}{(x-y)^2} & 2+\frac{1}{(y-x)^2}+\frac{1}{(y-z)^2} & -\frac{1}{(y-z)^2}\\ -\frac{1}{(x-z)^2} & -\frac{1}{(y-z)^2} & 2+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(z-y)^2}\end{pmatrix}.$$

   (c) Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $H=\begin{pmatrix}h\\k\\\ell\end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned}{}^tH\cdot\nabla^2V(X)\cdot H &= \left(2+\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(x-z)^2)}\right)h^2+\left(2+\frac{1}{(y-x)^2}+\frac{1}{(y-z)^2)}\right)k^2+\\ &\quad+\left(2+\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(x-z)^2)}\right)\ell^2-\frac{2hk}{(x-y)^2}-\frac{2h\ell}{(x-z)^2}-\frac{2k\ell}{(y-z)^2}\\ &= 2(h^2+k^2+\ell^2)+\frac{1}{(x-y)^2}(h^2-2hk+k^2)+\frac{1}{(y-z)^2}(k^2-2k\ell+\ell^2)+\\ &\quad+\frac{1}{(z-x)^2}(h^2-2h\ell+\ell^2)\end{aligned}$$

   On obtient donc bien, après factorisation :

$$\boxed{{}^tH\cdot\nabla^2V(X)\cdot H=\frac{(h-k)^2}{(x-y)^2}+\frac{(k-\ell)^2}{(y-z)^2}+\frac{(\ell-h)^2}{(z-x)^2}+2(h^2+k^2+\ell^2).}$$

   (d) On a $A\in U$, donc, en notant $A=(\alpha,\beta,\gamma)$, $\alpha<\beta<\gamma$. Soit $B=(a,b,c)\in U$. On a aussi $a<b<c$. Soit alors $C\in[AB]$. Il existe $t\in[0,1]$ tel que :

$$C=(1-t)A+tB=((1-t)\alpha+ta,(1-t)\beta+tb,(1-t)\gamma+tc).$$

   La positivité de t et de $1-t$ permet alors de dire que les coordonnées de C vérifient aussi les inégalités définissant U'. Ainsi, $\boxed{[AB]\subset U'}$.
   La fonction V est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U' contenant $[AB]$. Ainsi, d'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, il existe $\theta\in[0,1]$ tel que

$$V(B)=V(A)+\langle B-A,\nabla V(A)\rangle+q_{A+\theta(B-A)}(B-A),$$

   où q_X désigne la forme quadratique associée à la hessienne en X. D'après la question précédente, $q_{A+\theta(B-A)}$ ne prend que des valeurs positives. Comme de plus $\nabla V(A)=0$, on obtient :

$$V(B)\geqslant V(A),$$

   et donc $\boxed{V\text{ admet au point }A\text{ un }\underline{\text{minimum}}\text{ sur }U'}$

Correction de l'exercice 2 – Ecricome 2002

1. Étude de l'absolue convergence de la série

(a) Pour tout $t \in [0,1]$, on a $t^2 \leqslant t$, donc $\frac{1+t^2}{2} \leqslant \frac{1+t}{2}$.
De plus, $\frac{(1+t^2)}{2} = \frac{1}{2}((1-t)^2 + 2t) = \frac{1}{2}(1-t)^2 + t \geqslant t$.
Ainsi :

$$\forall t \in [0,1], \quad t \leqslant \frac{1+t^2}{2} \leqslant \frac{1+t}{2}.$$

Vous pouvez aussi retrouver ces inégalités par un argument de convexité, la fonction $t \mapsto \frac{1+t^2}{2}$ étant convexe : la première inégalité traduit le fait que la courbe est au dessus de la tangente en 1, et la seconde traduit le fait qu'elle est en-dessous de sa corde entre 0 et 1.
Les fonctions de cet encadrement étant toutes positives sur $[0,1]$, on obtient :

$$\forall t \in [0,1], \quad t^n \leqslant \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leqslant \left(\frac{1+t}{2}\right)^n,$$

et par conséquent,

$$\int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n$$

donc

$$\frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant 2 \cdot \left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)2^{n-1}} \leqslant \frac{2}{n+1}.$$

Ainsi, on a bien obtenu, pour tout entier naturel

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{n+1}}.$$

J'admets que la question est un peu brutale en début d'exercice. Il n'est pas évident de trouver comment s'y prendre.

(b) La série de terme général $\frac{1}{n+1}$ étant divergente en tant que série de Riemann de paramètre 1, la série de terme général a_n aussi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs. Ainsi, puisque $|u_n(x)| = a_n$ lorsque $|x| = 1$, les série de termes généraux $u_n(1)$ et $u_n(-1)$ ne sont $\boxed{\text{pas absolument convergentes.}}$

(c)
- Si $|x| \geqslant 1$, alors $|u_n(x)| \geqslant a_n \geqslant 0$, et comme $\sum a_n$ diverge, $\sum |u_n(x)|$ diverge aussi, donc $\sum u_n(x)$ ne converge pas absolument.
- Si $|x| < 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n(x)| = a_n |x|^n \leqslant \frac{2|x|^n}{n+1} \leqslant 2|x|^n.$$

Or, la série de terme général $2|x|^n$ est convergente, en tant que série géométrique de raison dans $]-1,1[$. Ainsi, les séries étant à termes positifs, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|u_n(x)|$ est convergente.

Par conséquent, $\boxed{\sum u_n(x) \text{ converge absolument si et seulement si } |x| < 1.}$

2. <u>Somme de la série pour $-1 \leqslant x < 1$.</u>
On suppose maintenant que $-1 \leqslant x < 1$.

(a) Soit $t \in [0,1]$. On a

$$(2 - x - xt^2) - \frac{3}{2}(1-x) = \frac{1}{2} + x\left(\frac{1}{2} - t^2\right).$$

Or, $t^2 \in [0,1]$, donc $\frac{1}{2} - t^2 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et donc, puisque $|x| \leqslant 1$, $x\left(\frac{1}{2} - t^2\right) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc

$$\frac{1}{2} + x\left(\frac{1}{2} - t^2\right) \geqslant 0 \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{(2 - x - xt^2) \geqslant \frac{3}{2}(1-x)}$$

(b) L'expression $2 - x - xt^2$ est nulle si et seulement si $xt^2 = 2 - x$. On, comme $x < 1$, $2 - x > 1$, alors que $|xt^2| \leqslant 1$ lorsque $t \in [0,1]$, donc $2 - x - xt^2$ ne s'annule pas sur $[0,1]$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{2 \, \mathrm{d}t}{2 - x - xt^2}$ est donc définie et continue (en tant que quotient de fonctions polynomiales) sur $[0,1]$, d'où $\boxed{\text{l'existence de l'intégrale } \int_0^1 \frac{2 \, \mathrm{d}t}{2 - x - xt^2}}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| &= \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^k \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k\right| \\
&= \left|\int_0^1 \left(\frac{2}{2-x-xt^2} - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x(1+t^2)}{2}\right)^k\right) \mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^1 \left(\frac{2}{2-x-xt^2} - \frac{1-\left(\frac{x(1+t^2)}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{x(1+t^2)}{2}}\right) \mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^1 \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(x(1+t^2))^{n+1}}{2-x(1+t^2)} \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant 2|x|^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{|2-x(1+t^2)|} \mathrm{d}t \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant 2\frac{|x|^{n+1}}{\frac{3}{2}(1-x)} a_{n+1} \qquad \left(\text{car } 2-x-xt^2 \geqslant \frac{3}{2}(1-x) \geqslant 0 \text{ sur } [0,1]\right) \\
&\leqslant \frac{4|x|^{n+1}}{3(1-x)} \cdot \frac{2}{n+2} \qquad \text{(d'après 1(a))} \\
&\leqslant \boxed{\frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}}.
\end{aligned}$$

(d) Le réel $x \in [-1,1[$ étant fixé, $|x|^{n+1} \leqslant 1$ et donc

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leqslant \frac{8}{3(n+2)(1-x)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite en $+\infty$, d'où on peut déduire que $\boxed{\text{la série de terme général } u_n(x) \text{ converge}}$, et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = f(x)}.$$

Était-ce suffisant, ou bien fallaitèil calculer $f(x)$? Dans le doute, on effectue ce calcul.

- Si $x \in [-1,0[$, alors $\frac{x}{2-x} < 0$, et :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{-x}{2-x}}}{1+\left(\sqrt{\frac{-x}{2-x}} \cdot t\right)^2} \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \left[\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{-x}{2-x}} \cdot t\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{-x}{2-x}}\right)
\end{aligned}$$

- Si $x \in]0,1[$, alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^1 -\frac{2}{x}\frac{1}{t^2-\frac{2-x}{x}}\ \mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{x}\int_0^1 \frac{1}{\left(t-\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right)\left(t+\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right)}\ \mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\frac{\left(t+\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right)-\left(t-\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right)}{\left(t+\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right)\left(t-\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right)} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\left[\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{2-x}{x}}}{t+\sqrt{\frac{2-x}{x}}}\right|\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\frac{\left|1-\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right|}{1+\sqrt{\frac{2-x}{x}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}},
\end{aligned}$$

car $\frac{2-x}{x} > 1$ puisque $2-x>1$ et $x \in]0,1[$.
- Si $x=0$, alors

$$f(0) = \int_0^1 1\ \mathrm{d}t = 1.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge, et

$$\boxed{\forall x \in [-1,1[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}}\ \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{-x}{2-x}}\right) & \text{si } x \in [-1,0[\\ 1 & \text{si } x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,1[. \end{cases}}$$

Je pense que ce calcul pour expliciter f n'était pas attendu, mais l'énoncé est ambiguë sur ce point...

(e) On a :

$$a_0 = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^0\ \mathrm{d}t = \int_0^1 1\ \mathrm{d}t \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{a_0 = 1}.$$

Par ailleurs, étant donné $k \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une intégration par parties avec les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{k+1}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, il vient :

$$a_{k+1} = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{k+1}\ \mathrm{d}t = \left[t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{k+1}\right]_0^1 - \int_0^1 (k+1)t^2\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k\ \mathrm{d}t,$$

et en écrivant dans la dernière intégrale obtenue, $t^2 = 1+t^2-1$, il vient :

$$a_{k+1} = 1-2(k+1)a_{k+1}+(k+1)a_k,$$

et donc

$$\boxed{(2k+3)a_{k+1} = 1+(k+1)a_k}.$$

(f) Il est entendu ici qu'on ne se sert pas de l'explicitation de f mais de l'écriture de f sous forme d'une somme. On suppose que la valeur de x fournie est dans $[-1,1[$, sans faire de test de cohérence. On écrit l'algorithme sous forme d'une fonction.

```
function f(x:real;p:integer):real;
var S,err,xn,a:real;
    n:integer;
```

```
begin
  err:=1E(-p);  {calcul de la marge d'erreur autorisee}
  a:=1;   {initialisation de la suite a_n}
  xn:=1;  {initialisation de la suite x^n}
  S:=1;   {initialisation de la somme des u_k, on y a deja mis le premier terme}
  n:=1;   {initialisation du rang}
  repeat
    a:= (1+ (n+1)a)/(2n+3);
    xn:=xn * x;
    S:=S+ a*xn;
    n:=n+1;
  until
    (8 * abs(xn*x))/(3*(n+2)*(1-x)) < err;
  f:=S;
end;
```

Correction du problème – (d'après Écricome 2010)

Partie I – Résultats préliminaires

1. Étude d'une suite.

   (a)
```
program ecricome2010PBI;
var n,i:integer;
    S:real;
begin
 readln(n);
 S:=0;
 for i:=1 to n do
   S:=S+ 1/i;
 S:=S-ln(n);
writeln(S);
end.
```

   (b) **Question archi-classique.** On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n - u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n - \sum_{i=1}^{n+1} + \ln(n+1) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}.$$

On effectue un développement limité sur cette expression, lorsque n tend vers l'infini (donc $\frac{1}{n}$ tend vers 0 :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.}$

Le terme $\frac{1}{2n^2}$ est positif, donc aussi $u_n - u_{n-1}$, au moins à partir d'un certain rang. Ainsi, la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ est de même natude que la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$, qui est une série de Riemann de paramètre 2, donc convergente. Ainsi, $\boxed{\text{la série de terme général } u_n - u_{n+1} \text{ converge.}}$

La somme partielle de cette série est donc une suite convergente. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} u_k - u_{k+1} = u_1 - u_n,$$

puisqu'il s'agit d'une somme télescopique. Ainsi, $(u_1 - u_n)$ est une suite convergente, donc, u_1 étant indépendant de n, $\boxed{(u_n) \text{ est une suite convergente.}}$

(c) C'est du cours : il s'agit de la somme partielle d'une série convergente (série de Riemann), donc $\boxed{\text{elle converge}}$.

2. Loi de Gumbel

(a) • F_Z est une fonction continue sur $\mathbb{R}$;
• la fonction *tmapsto* $\exp(-t)$ étant décroissante, F_Z est croissante, comme composée de deux fonctions décroissantes ;
• $\lim\limits_{t \to -\infty} F_Z(t) = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_Z(t) = \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{-x} = 1$.

Ainsi, $\boxed{F_Z \text{ possède les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition.}}$

De plus, F_Z est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, il s'agit de la fonction de répartition d'une variable à densité, et une densité est obtenue par dérivation :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Z(t) = \mathrm{e}^{-t} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-t}}.$$

(b) On a $W(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$F_W(t) = P(\exp(-Z) \leqslant t) = P(Z \geqslant -\ln t),$$

car $x \mapsto -\ln x$ est décroissante. Ainsi

$$F_W(t) = 1 - F_Z(-\ln t).$$

Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_W(t) = \begin{cases} 1 - F_Z(-\ln t) = 1 - \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0. \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, $\boxed{W \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$.

La fonction $f : x \mapsto (\ln(x))^k \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Ainsi, l'intégrale admet deux impropriétés en 0 et $+\infty$.

• D'après les croissances comparées, $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}|f(x)| = 0$, donc au voisinage de 0^+, $|f(x)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
Or, les fonctions comparées sont positives, et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en 0 de paramètre $\frac{1}{2} < 1$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x$ converge.

• D'après les croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} x^2|f(x)| = 0$, donc au voisinage de $+\infty$, $|f(x)| = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Or, les fonctions comparées sont positives, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ de paramètre $2 > 1$. Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x$ converge.

On en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} (\ln(x))^k \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \text{ est absoluemtn convergente.}}$

(d) D'après le second théorème de transfert, Z admet un moment d'ordre k si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t$ converge absolument, c'est-à-dire si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^k \mathrm{e}^{-t} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t$ converge.

On effectue dans cette intégrale le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-t}$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant, bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et tel que $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^k \mathrm{e}^{-t} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t$ est alors convergente si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} |-\ln u|^k \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u$ converge, ce qui est le cas d'après la question précédente. Ainsi, $\boxed{Z \text{ admet un moment d'ordre } k}$, et en effectuant le même changement de variable sur l'intégrale initiale, on obtient :

$$\boxed{E(Z^k) = \int_0^{+\infty} (-\ln(u))^k \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u.}$$

(e) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$F_{-T}(t) = P(-T \leqslant t) = P(T \geqslant -t) = 1 - F_T(-t),$$

et comme F_T est continue partout et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, il en est de même de F_{-T}. Ainsi, $-T$ est une variable à densité, et par dérivation :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{-T}(t) = f_T(-t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si } t \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f_Z(t) f_{-T}(x-t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{e}^{x-t} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}} & \text{si } t \in [x, +\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$f_Z \star f_{-T}(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \int_0^{\mathrm{e}^{-x}} u\mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u,$$

en effectuant le changement de variable, déjà justifié, $u = \mathrm{e}^{-t}$. Ainsi, en effectuant une intégration par parties, avec les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto -\mathrm{e}^{-u}$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_Z \star f_{-T}(x) &= \mathrm{e}^x \left(\Big[-u\mathrm{e}^{-u} \Big]_0^{\mathrm{e}^{-x}} + \int_0^{\mathrm{e}^{-x}} \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u \right) \\ &= \mathrm{e}^x(-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} + 1) \end{aligned}$$

La fonction obtenue est continue, et Z et $-T$ sont indépendantes, donc une densité de $Z - T$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{Z-T}(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}(1 + e^x).$$

Partie II – Étude de la variable X_r

1. Étude du cas $r = 3$

(a) Soit n un entier naturel non nul.

L'événement $(Y_2 > n)$ est réalisé si et seulement si à l'issue du n-ième tirage, on n'a pas encore obtenu deux numéros de boules différents, donc si et seulement si lors des n premiers tirages, on a toujours obtenu le même numéro, ce qui correspond à l'événement C_n. Ainsi, $\boxed{(Y_2 > n) = C_n}$

On a $C_n = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$, donc, d'après la formule des probabilités composées,

$$P(C_n) = P(C_1)P_{C_1}(C_2) \cdots P_{C_1 \cap \ldots C_{n-1}}(C_n).$$

Or, C_1 est l'événement certain donc $P(C_1) = 1$, et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, si $C_1 \cap \cdots \cap C_i$ est réalisé (on a donc toujours tiré la même boule), alors C_{i+1} est réalisé si et seulement si on tire encore une fois la même boule, ce qui se fait avec une probabilité $\frac{1}{3}$ (il y a trois boules). Ainsi

$$\boxed{P(C_n) = P(Y_2 > n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}.$$

Or, $Y_2(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$P(Y_2 = n) = P(Y_2 > n-1) - P(Y_2 > n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}$$

On peut remarquer que $Y_2 - 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$

(b) Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $[Y_2 = k]$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, forme un système complet d'événements. Ainsi

$$\begin{aligned} P(Y_3 - Y_2 = n) &= P\left([Y_3 - Y_2] \cap \left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} [Y_2 = k]\right)\right) \\ &= P\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} ([Y_3 - Y_2 = n] \cap [Y_2 = k]\right) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 - Y_2 = n] \cap [Y_2 = k]) \end{aligned}$$

car les événements sont deux à deux incompatibles. Ainsi

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]).}$$

L'événement $[Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k]$ est réalisé si et seulement si on fait un premier tirage (sans condition), puis, lors des $k - 2$ tirages suivants, on tire la même boule (avec une probabilité $\frac{1}{3}$), puis lors du k-ième tirage, on tire une des deux boules restantes (avec une probabilité $\frac{2}{3}$, puis lors des tirages $k + 1$ jusqu'à $n + k - 1$ ($n - 1$ tirages), on tire une des deux boules déjà tirées (probabilité $\frac{2}{3}$), et enfin, on tire la troisième boule (probabilité $\frac{1}{3}$). Ainsi

$$P([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \cdot \frac{1}{3^{k-1}}.}$$

On a $(Y_3 - Y_2)(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(Y_3 - Y_2 = n) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Ainsi, $\boxed{Y_3 - Y_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right).}$

2. <u>Loi de $Y_{i+1} - Y_i$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, r - 1\}$.</u>

(a) On ne peut pas avoir tiré i boules différentes avant le i-ième tirage. Si on ne tire que des boules différentes lors des i premiers tirages (possible car $i \leqslant n$), Y_i prend la valeur i. Toute valeur supérieure j est possible, pas exemple en tirant $i - 1$ valeurs distinctes jusqu'au rang $i - 1$, puis en tirant des valeurs déjà tirées jusqu'au rang $j - 1$, et en tirant une boule non encore tirée au rang j. Ainsi $\boxed{Y_i(\Omega) = \{i, i + 1, i + 2, \ldots\}}$
La variable $Y_{i+1} - Y_i$ représente le nombre de tirages à effectuer à l'issue du tirage donnant la $i - 1$-ième boule distincte pour tirer une boule non encore tirée (ce qui est possible si $i \leqslant n$). Une telle boule peut être tirée tout de suite, on obtient alors la valeur 1, ou plus tard. On obtient bien $\boxed{(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}}$

(b) Sachant que $Y_i = k$ est réalisé, $Y_{i+1} - Y_i = n$ est réalisé si et seulement si lors des $n - 1$ tirages qui suivent le tirage k, on ne tire que des boules qu'on a déjà tirées (au nombre de i sur un total de r), et au n-ième tirage, on tire une boule qu'on n'a pas encore tirée (au nombre de $r - i$ sur un total de r) Ainsi :

$$\boxed{P_{(Y_i = k)}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \frac{r - i}{r} = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right).}$$

(c) D'après la formule des probabilités totales, il vient donc

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y_{i+1} - Y_i = n) &= \sum_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right) P(Y_i = k) \\ &= \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right) \sum_{k=i}^{+\infty} P(Y_i = k) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{Y_{i+1} - Y_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - \frac{i}{r}\right)}$

on en déduit que

$$\boxed{E(Y_{i+1}-Y_i)=\frac{1}{1-\frac{i}{r}}=\frac{r}{r-i}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V(Y_{i+1}-Y_i)=\frac{i}{r}\cdot\left(\frac{r}{r-i}\right)^2=\frac{ir}{(r-i)^2}.}$$

3. Covariance du couple (Y_i, Y_{i+1}), $i \in [\![1, r-1]\!]$
   (a) On a, par indépendance :
   $$\boxed{V(Y_{i+1})=V(Y_i+Y_{i+1}-Y_i)=V(Y_i)+V(Y_{i+1}-Y_i)}.$$
   (b) Or,
   $$V(Y_{i+1}-Y_i)=V(Y_{i+1})+V(Y_i)-2\mathrm{cov}(Y_i,Y_{i+1}),$$
   donc
   $$2V(Y_i)-2\mathrm{cov}(Y_i,Y_{i+1})=0 \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\mathrm{cov}(Y_i,Y_{i+1})=V(Y_i)}.$$
   (c) La covariance est positive : plus il a fallu attendre longtemps pour avoir i boules différentes, plus il faudra attendre longtemps pour en avoir $i+1$.
4. Espérance et variance de X_r
   (a) On a une somme télescopique :
   $$1+\sum_{i=1}^{r-1}(Y_{r-i+1}-Y_{r-i})=1+Y_r-Y_1=Y_r=X_r,$$
   puisque Y_1 est la variable certaine égale à 1.
   Par linéarité de l'espérance, on a alors :
   $$E(X_r)=1+\sum_{i=1}^{r-1}E(Y_{r-i+1}-Y_{r-1})=1+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{r}{i}.$$
   Comme $1=\frac{r}{r}$, on obtient
   $$\boxed{E(X_r)=r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}}$$
   Puisque les variables Y_2-Y_1, $Y_3-Y_2,\dots,Y_r-Y_{r-1}$ sont indépendantes, on a :
   $$V(X_r)=\sum_{i=1}^{r-1}V(Y_{r-i+1}-Y_{r-1})=\sum_{i=1}^{r-1}r(r-i)i^2=\sum_{i=1}^{r}r(r-i)i^2$$
   car le terme ajouté est nul, et en séparant la somme en deux, on obtient bien :
   $$\boxed{V(X_r)=r^2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2}-r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}}.$$
   (b) D'après la question 1, (u_n) admet une limite finie, notée α. On a alors $u_r=\alpha+o(r)$, donc
   $$\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}=\ln(r)+\alpha r+o(r),$$
   et donc enfin : $\boxed{E(X_r)\underset{r\to+\infty}{=}r\ln(r)+\alpha r+o(r).}$
   Soit β la limite (finie) de $\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2}\right)$. Alors
   $$r^2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2}\underset{r\to+\infty}{\sim}\beta r^2, \qquad \text{et} \qquad r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}\sim r\ln r=o(r^2).$$
   On en déduit que $\boxed{V(X_r)\underset{r\to+\infty}{\sim}\beta r^2}$

5. Simulation informatique

On utilise un tableau à r entrées. On suppose pour cela qu'on dispose d'une constante Rmax supérieure à r. La case ℓ du tableau est égale à 0 sui la boule i n'a pas encore été tirée, et à 1 si elle a été tirée. De plus, on utilise une variable j comptant le nombre de boules différentes tirées, et n le nombre total de boules tirées

```
function Yi(r,i:integer):integer
var T:array[1..Rmax] of shortint;
    j,n,k,tirage:integer;
begin
  for k:=1 to r do T[k]:=0;  {initialisation du tableau}
  j:=0;                      {initialisation du nombre de boules distinctes}
  n:=0;                      {initialisation du nombre de tirages}
  repeat
    n:=n+1;
    tirage:= random(r)+1;
    if T[tirage]=0 then
       begin
         j:=j+1;
         T[tirage]:=1;
       end;
  until
    j=i;
  Yi:=i;
```

Partie III – Loi de X_r et de sa déviation asymptotique par rapport à sa moyenne

1. Loi de X_r
   (a) On note pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, B_m l'événement « le numéro k n'est pas tiré lors de la pioche m ».
   Ainsi :
   -
   $$A_{k,m} = B_1 \cap \cdots \cap B_m.$$
   Les tirages étant indépendants, et B_i étant réalisé si et seulement si on tire une des $r-1$ boules non numérotées k dans l'urne contenant r boules, on obtient :
   $$P(A_{k,m}) = P(B_1)\cdots P(B_m) = \boxed{\left(\frac{r-1}{r}\right)^m}.$$
   - L'énoncé n'est pas très clair sur les k numéros : sont-ils fixés ou non ? Est-ce exactement k, ou peut-il y en avoir plus ?
   La bonne interprétation est la suivante : étant donnés k numéros fixés $i_1, \dots, i_k$, quelle est la probabilité qu'au cours des m pioches aucune de ces boules $i_1, \dots, i_k$ n'ait été tirée ? Notons C cet événement, et pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, D_i l'événement : « la pioche i amène une boule de numéro différent de $i_1, \dots, i_k$ ».
   On a alors $P(D_i) = \frac{r-k}{r}$ (on a le choix entre $r-k$ boules sur un total de r), et, par indépendance des tirages
   $$P(C) = P(D_1 \cap \cdots \cap D_m) = P(D_1)\dots P(D_m) = \boxed{\left(\frac{r-k}{r}\right)^m}.$$

   (b) L'événement $[X_r > m]$ est réalisé si et seulement si une au moins des boules n'a jamais été tirée au cours des m premières pioches, donc si un au moins des événements $A_{k,m}$ est réalisé :
   $$[X_r > m] = \bigcup_{k=1}^{r} A_{k,m}.$$
   On utilise alors la formule du crible de Poincaré (eh oui, ça arrive, et si vous avez à l'utiliser, cela sera presque toujours dans une situation ressemblant à celle-ci, consistant à essayer de compléter une collection ; c'est ce qu'on appelle le « problème du collectionneur » ; retenez donc bien cette utilisation) :
   $$P(X_r > m) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,r]\!] \\ \mathrm{Card}(I)=k}} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

Lorsque I est de cardinal k, $\bigcap_{i\in I} A_i$ est un événement du type de l'événement C de la question précédente, les k boules données étant les boules de numéro dans I. Ainsi, quand $\mathrm{Card}(I) = k$

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \left(\frac{r-k}{r}\right)^m.$$

On a donc :

$$P(X_r > m) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subset [\![1,r]\!] \\ \mathrm{Card}(I)=k}} \left(\frac{r-k}{r}\right)^m$$

Ce dernier terme ne dépendant plus de l'indice de sommation I, on calcule la somme interne en mutlipliant ce terme par le nombre de termes dans la somme indexée par I, à savoir $\binom{r}{k}$ (les indices I correspondant étant tous les sous-ensembles de cardinal k d'un ensemble de cardinal r, donc en nombre $\binom{r}{k}$ par définition du coefficient binomial). Ainsi :

$$\boxed{P(X_r > m) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^m.}$$

On a alors $X_r(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \ldots, r-1\}$, et

$$\begin{aligned}
\forall m \geqslant r, \quad P(X_r = m) &= P(X_m > m-1) - P(X_m > m) \\
&= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m-1} - \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m},
\end{aligned}$$

et donc

$$\forall m \geqslant r, \quad \boxed{P(X_r = m) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} \binom{r}{k} \frac{k}{r} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m-1}}.$$

2. Comportement de X_r au delà de sa moyenne

(a) Soit, pour tout m dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(m)$: $P\left(\bigcup_{i=1}^{m} D_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} P(D_i)$.

La propriété $\mathcal{P}(1)$ se réécrit $P(D_1) \leqslant P(D_1)$, ce qui est trivialement vrai. La propriété $\mathcal{P}(2)$, que nous utiliserons, provient de la formule du crible et de la positivité des probabilités :

$$P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) \leqslant P(D_1) + P(D_2).$$

Soit $m \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}(m)$ est vrai. Alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} D_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} D_i\right) \cup D_{m+1}\right) \leqslant P\left(\bigcup_{i=1}^{m} D_i\right) + P(D_{m+1}),$$

d'après la propriété $\mathcal{P}(2)$, qu'on a déjà vérifié, puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(m)$, il vient :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} D_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} P(D_i) + P(D_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} P(D_i).$$

Ainsi, $\mathcal{P}(m+1)$ est alors aussi vérifié.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout m dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(m)$ entraîne $\mathcal{P}(m+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout m dans $\mathbb{N}^*$.

(b) La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^2$, de dérivée seconde égale à elle-même, donc positive. Elle est donc convexe, et sa courbe se situe au-dessus de sa tangente en 0, dont l'équation est $y = x + 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp(x) \geqslant 1 + x}$.

Par conséquent, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, et par croissance de $y \mapsto y^m$ sur $\mathbb{R}^+$, m étant positif, on obtient :

$$\boxed{P(A_{k,m}) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^m \leqslant (\mathrm{e}^{-\frac{1}{r}})^m = \mathrm{e}^{-\frac{m}{r}}}.$$

(c) • Puisque $M_r \leqslant (1+\varepsilon)r\ln(r)$, pour tout $\omega \in \Omega$, $X_r(\omega) > (1+\varepsilon)r\ln(r)$ implique $X_r(\omega) > M_r$. Ainsi, on a une inclusion
$$[X_r > (1+\varepsilon)r\ln(r)] \subset [X_r > M_r].$$

• De la même manière, puisque $(1-\varepsilon)r\ln(r) < M_r + 1$, on obtient une inclusion
$$[X_r \geqslant M_r + 1] \subset [X_r > (1+\varepsilon)r\ln(r)].$$

Or, puisque X_r ne prend que des valeurs entières, et puisque M_r est un entier, $[X_r > M_r] = [X_r \geqslant M_r + 1]$. Ainsi
$$[X_r > M_r] \subset [X_r > (1+\varepsilon)r\ln(r)].$$

Des deux inclusions, on déduit l'égalité $\boxed{[X_r > (1+\varepsilon)r\ln(r)] = [X_r > M_r]}$
Par conséquent,
$$P(X_r > (1+\varepsilon)r\ln(r)) = P(X_r > M_r) = P\left(A_{1,M_r} \cup \cdots \cup A_{r,M_r}\right),$$
d'après un raisonnement déjà effectué. Ainsi, en utilisant 2(a),
$$P(X_r > (1+\varepsilon)r\ln(r)) \leqslant \sum_{k=1}^{r} P(A_{k,M_r}) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \exp\left(-\frac{M_r}{r}\right),$$
d'après la question 2(b). Or, $M_r > (1+\varepsilon)r\ln r - 1$, donc, par croissante de l'exponentielle,
$$\exp\left(-\frac{M_r}{r}\right) \leqslant \exp\left(-(1+\varepsilon)\ln r + \frac{1}{r}\right) = \frac{\exp^{-\frac{1}{r}}}{r^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{r^{1+\varepsilon}},$$
puisque $frac1r \leqslant 1$. Ainsi,
$$\boxed{P(X_r > (1+\varepsilon)r\ln(r)) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \frac{\mathrm{e}}{r^{1+\varepsilon}} = \frac{r\mathrm{e}}{r^{1+\varepsilon}} = \frac{\mathrm{e}}{r^{\varepsilon}}}.$$

L'interprétation de ce résultat donnée dans l'énoncé provient du fait que le terme $r\ln(r)$ intervenant dans cette expression est l'équivalent de $E(X_r)$ trouvé dans la partie II.

3. <u>Distribution de X_r autour de sa moyenne</u>

(a) Le réel t étant fixé, $rt = o(r\ln r)$, donc $r\ln(r) + rt \underset{r\to+\infty}{\sim} r\ln r$, donc
$$\lim_{r\to+\infty} r\ln r + rt = +\infty \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{r\to+\infty} m_r = +\infty$$
En prenant $A = 1$ dans la définition de la limite infinie d'une suite, on obtient l'existence d'un rang $r_0(t)$ (dépendant du réel t fixé) tel que :
$$\boxed{\forall r \geqslant r_0(t),\ m_r \geqslant 1.}$$
Par ailleurs, pour tout $r \geqslant r_0(t)$,
$$[Z_r > t] = \left[\frac{X_r - r\ln(r)}{r} > t\right] = [X_r > r\ln(r) + rt,$$
car $r > 0$. Le même raisonnement que en 2(c) amène alors
$$[Z_r > t] = [X_r > m_r] \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{P(Z_r > t) = P(X_r > m_r)}$$

(b) Tout d'abord, $lim_{r\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = 0$, et pour tout r,
$$0 \leqslant r\ln r + rt - m_r < 1,$$

donc $\lim_{r\to+\infty}(r\ln r+rt-m_r)\ln\left(1-\frac{k}{r}\right)=0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} m_r\ln\left(1-\frac{k}{r}\right) &\underset{r\to+\infty}{=}(r\ln r+rt)\ln\left(1-\frac{k}{r}\right)+o(1)\\ &\underset{r\to+\infty}{=}(r\ln(r)+rt)\left(-\frac{k}{r}-\frac{k^2}{2r^2}+o\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)+o(1)\\ &\underset{r\to+\infty}{=}-k\ln(r)-kt-\frac{k^2\ln(r)}{2r}-\frac{k^2t}{2r}+o\left(\frac{\ln r}{r}\right)+o(1), \end{aligned}$$

et comme $\frac{\ln(r)}{r}$ et $\frac{1}{r}$ tendent vers 0,

$$-\frac{k^2\ln(r)}{2r}-\frac{k^2t}{2r}+o\left(\frac{\ln r}{r}\right)\underset{r\to+\infty}{=}o(1),$$

d'où finalement :

$$\boxed{m_r\ln\left(1-\frac{k}{r}\right)\underset{r\to+\infty}{=}-k\ln(r)-kt+o(1).}$$

(c) Pour tout k, et tout $r\geqslant k$, on a

$$\binom{r}{k}=\frac{r!}{(r-k)!k!}=\frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}.$$

Or, k étant fixé,

$$r-1\underset{r\to+\infty}{\sim}r,\quad r-2\underset{r\to+\infty}{\sim}r,\quad\dots\quad r-k+1\underset{r\to+\infty}{\sim}r.$$

On en déduit que

$$\boxed{\binom{r}{k}\underset{r\to+\infty}{\sim}\frac{r^k}{k!}}.$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r}=\mathrm{e}^{m_r\ln\left(1-\frac{k}{r}\right)}\underset{r\to+\infty}{=}\mathrm{e}^{-k\ln r-kt+o(1)}\underset{r\to+\infty}{=}\frac{1}{r^k}\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{e}^{o(1)}.$$

Or, $\mathrm{e}^{o(1)}$ tend vers 1 en $+\infty$, donc

$$\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r}\underset{r\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}^{-kt}}{r^k}.$$

On en déduit alors que pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r}\underset{r\to+\infty}{\sim}\frac{r^k}{k!}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-kt}}{k!}=\frac{\mathrm{e}^{-kt}}{k!}.$$

Ainsi, cette expression ne dépendant pas de r, on obtient :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad\boxed{\lim_{r\to+\infty}\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r}=\frac{\exp(-kt)}{k!}}.$$

(d) On a alors, pour tout $t\in\mathbb{R}$, et tout $r\geqslant r_0(t)$

$$F_{Z_r}(t)=P(Z_r\leqslant t)=1-P(Z_r>r)=1-P(X_r>m_r)=1-\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r}.$$

L'énoncé nous fait admettre l'existence de la limite de cette valeur, égale à la somme sur $\mathbb{N}^*$ (on fait tendre la borne supérieure vers $+\infty$ des limites terme à terme. Ainsi

$$\lim_{r\to+\infty}F_{Z_r}(t)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\mathrm{e}^{-kt}}{k!}=1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k}\frac{\mathrm{e}^{-kt}}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{e}^{-t})^k}{k!}.$$

En reconnaissant une série exponentielle, on obtient alors :

$$\lim_{r\to+\infty}F_{Z_r}(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}=F_Z(t).$$

Ainsi, $\boxed{(Z_r)\text{ converge en loi vers }Z\text{ suivant une loi de Gumbel.}}$