Interrogation n° 4 – Intégrales impropres, probabilités

1. • Soit X et Y deux v.a.r.d. Leur covariance est définie, en cas d'existence, par : $\mathrm{cov}(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y)))$.
 • $\mathrm{cov}(X,Y)$ existe si X et Y ont des moments d'ordre 2, et $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
 • $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$
 • pour tout X, Y, Z, λ, μ, $\mathrm{cov}(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda \mathrm{cov}(X,Z) + \mu \mathrm{cov}(Y,Z)$
 • de même pour la deuxième coordonnée (cov est bilinéaire)
 • Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

2. (a) Soit S une primitive de s, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = S(t+T) - S(t)$. Alors g est dérivable (puisque S l'est), et pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$g'(t) = S'(t+T) - S'(t) = s(t+T) - s(t) = 0.$$
Ainsi, $\mathbb{R}$ étant un intervalle, g est constante. De plus,
$$g(0) = S(T) - S(0) = \int_0^T s(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$
Ainsi, la fonction g est nulle, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(t+T) = S(t)$, dont $\boxed{S \text{ est } T\text{-périodique.}}$
La fonction S étant continue sur $[0,T]$, intervalle fermé borné, elle est bornée sur cet intervalle, donc aussi sur $\mathbb{R}$, puisque les valeurs prises sur $\mathbb{R}$, sont aussi celles prises sur $[0,T]$, par périodicité.

(b) La fonction sf est continue sur $[1,+\infty[$. l'intégrale admet une seule impropriété en $+\infty$.
Les fonctions S et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, et vérifient $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t)f(t) = 0$, puisque S est bornée et f de limite nulle. Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{+\infty} s(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} S(t)f'(t)\ \mathrm{d}t$.
Or, f' étant négative (puisque f décroît), et S étant bornée, il existe $M > 0$ tel que
$$\forall t \in [1,+\infty[,\quad |S(t)f'(t)| \leqslant M|f'(t)| = -Mf'(t).$$
La fonction f étant une primitive de f', et admettant une limite en $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'(t)\ \mathrm{d}t$ converge, donc aussi $\displaystyle\int_1^{+\infty} -Mf'(t)\ \mathrm{d}t$. D'après le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} S(t)f'(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge. Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} s(t)f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge.}}$

3. La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale a donc deux impropriétés en 0 et en $+\infty$.
Effectuons une intégration par parties, en posant, pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$u(x) = \ln(x^2+1) \qquad \text{et} \qquad v(x) = -\frac{1}{x}.$$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$u'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \qquad \text{et} \qquad v(x) = \frac{1}{x^2}.$$
On a :
 • $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ d'après les croissances comparées
 • $\lim\limits_{x\to0} u(x)v(x) = 0$, car $u(x)v(x) \underset{0}{\sim} x$.

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\ \mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\ \mathrm{d}x}{1+x^2}$. Cette dernière intégrale n'est pas impropre en 0 (donc convergente), et converge en $+\infty$ (car une primitive $x \mapsto 2\operatorname{Arctan} x$ admet une limite finie en $+\infty$, ou alors par comparaison à l'aide d'un équivalent à une intégrale de Riemann). Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\ \mathrm{d}x \text{ converge}}$, et
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\ \mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_{\lim_0}^{\lim_{+\infty}} + \int_0^{+\infty} \frac{2\ \mathrm{d}x}{1+x^2} = \Big[2\operatorname{Arctan} x\Big]_0^{\lim_{+\infty}} = \boxed{\pi}.$$
Pour la convergence en 0, on aurait aussi pu constater directement que l'intégrale est faussement impropre en cette borne.

4. (a) Soit pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, B_i l'événement : « on tire une boule blanche lors du i-ième tirage », et N_i l'événement : « on tire une boule noire lors du i-ième tirage.

Soit A_N l'événement :« lors des N premiers tirages, on n'a tiré que des boules blanches ».

L'événement A_i est réalisé si et seulement si à tous les tirages de rang 1 jusqu'à N, on a tiré des boules blanches :

$$A_i = \bigcap_{i=1}^{N} B_i.$$

- Si $N > n+1$, cet événement est impossible, car il implique qu'on retire une boule blanche à chaque tirage, à partir du deuxième, donc à l'issue du $n+1$-ième tirage, on n'a plus de boule blanche, donc on ne peut plus tirer de boule blanche au $n+2$-ième tirage. Ainsi, $\boxed{\text{si } N > n+1,\ P(A_N) = 0.}$
- Si $N \in [\![1, n+1]\!]$, l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{N-1}$ n'est par quasi-impossible, donc, d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(A_N) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(B_3)\cdots P_{B_1\cap\cdots\cap B_{N-1}}B_N.$$

Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$. La connaissance de la réalisation de $B_1 \cap \cdots \cap B_k$ implique que pour le $k+1$-ième tirage, on a retiré $k-1$ boules blanches, donc il reste $n-k+1$ boules blanches sur un total de $2n-k+1$. Ainsi

$$\boxed{P(A_n) = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{N-1}\frac{n-k+1}{2n-k+1} = \frac{1}{2}\frac{n!(2n-N+1)!}{(n-N+1)!(2n)!}}.$$

(b) On peut retirer la première boule à l'issue du 2-ième tirage (si on tire deux boules de même couleur lors des deux premiers tirages), ou à n'importe quel tirage suivant, ou jamais (mais avec une probabilité nulle). Ainsi, $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$

Pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$, $[X = k]$ est réalisé si et seulement si on n'a retiré aucune boule avant le tirage k et qu'on en retire une au tirage k, donc si lors des $k-1$ premiers tirages, la couleur des boules alterne, et qu'en revanche, les boules obtenues aux tirages k et $k-1$ sont de même couleur. Ainsi, en notant, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, C_i l'événement « obtenir au tirage i une boule de couleur différente de celle obtenue au tirage $i-1$ » :

$$[X = k] = C_2 \cap \cdots \cup C_{k-1} \cap \overline{C_k}.$$

Remarquez que le résultat du premier tirage importe peu.

L'événement $C_2 \cap \cdots \cap C_{k-1}$ n'est pas quasi-impossible, car il stipule que l'urne est inchangée jusqu'au tirage $k-1$, donc à chaque étape, il reste n boules de chaque couleur, donc il est possible (avec une probabilité non nulle) de tirer une boule de couleur différente de la précédente.

Ainsi, d'après la formule des probabilités composées,

$$P(X = k) = P(C_2)P_{C_2}(C_3)\cdots P_{C_2\cap\cdots\cap C_{k-2}}(C_{k-1})P_{C_2\cap\cdots\cap C_{k-1}}(C_k) = \boxed{\frac{1}{2^{k-1}} = P(X = k)},$$

car les conditions imposées impliquent que l'urne contient, avant chaque tirage intervenant ici, autant de boule noire que de boule blanche.

On peut alors remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X-1 = k) = P(X = k+1) = \frac{1}{2^k},$$

donc $\boxed{X - 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})}$. On en déduit que $\boxed{E(X) = E(X-1)+1 = 2+1 = 3}$ et $\boxed{V(X) = V(X-1) = 2}$.

(c) Soit Y le nombre de boules retirées lors de 3 tirages. Comme on peut retirer des boules à partir du second tirage seulement, $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

- L'événement $[Y = 0]$ est réalisé si et seulement si aucune boule n'est retirée, donc s'il y a aternance stricte des couleurs. Donc $[Y = 0] = C_2 \cap C_3$, puis, comme en (b) :

$$P(Y = 0) = P(C_2)P_{C_2}(C_3) = \frac{1}{2^3} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

- L'événement $[Y = 1]$ est réalisé si et seulement si on a une répétition de couleurs une seule fois lors des tirages. On peut énumérer tous les cas : $[Y = 1] = (\overline{C_2} \cap C_3) \cup (C_2 \cap \overline{C_3})$, d'où, par incompatibilité :

$$P(Y = 1) = P(\overline{C_2} \cap C_3) + P(C_2 \cap \overline{C_3}) = P(\overline{C_2})P_{\overline{C_2}}(C_3) + P(C_2)P_{C_2}(\overline{C_3}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2n-1} = \boxed{\frac{1}{4}\frac{4n-1}{2n-1}}.$$

- L'événement $[Y = 2]$ est réalisé si et seulement si toutes les boules tirées sont de la même couleur, soit blanches, soit noires. Ainsi,

$$[Y = 2] = (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap N_3),$$

d'où, par incompatibilité :

$$P(Y = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{n-1}{2n-1}},$$

d'après la question (a), et du fait que le cas des boules noires est similaire au cas des boules blanches.