Correction de l'interrogation n° 5

1. La matrice A étant symétrique réelle, elle est $\boxed{\text{diagonalisable}}$ (sur $\mathbb{R}$), donc admet au moins une valeur propre. Par ailleurs, $X^2 - 4X + 3$ est un polynôme annulateur de A, donc les racines sont 1 et 3. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 3\}$.
   Puisque A est diagonalisable, elle ne peut pas avoir qu'une valeur propre (nécessairement égale à 1 ou 3), sinon, A serait la matrice d'une homothétie de rapport 1 ou 3, ce qui contredirait l'hypothèse $A \neq I_n$ et $A \neq 3I_n$.
   Ainsi, A possède au moins 2 valeurs propres, et d'après l'inclusion $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 3\}$, on en déduit l'égalité $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}}$.
2. Soit E muni d'un produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$. Soit X et y deux vecteurs de E. On a alors :
   $$|\langle x, y\rangle| \leqslant |||x||| \cdot |||y|||,$$
   avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.
   La démonstration part de l'observation que (sauf dans un cas trivial traité séparément) le polynôme $\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle$ en λ est de degré 2 et toujours positif, et ne peut donc pas avoir deux racines distinctes. Cela se traduit par la négativité de son discriminant. Cette négativité équivaut à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. - M_1 n'est pas la matrice d'un produit scalaire, car elle n'est pas symétrique.
   - M_2 n'est pas la matrice d'un produit scalaire, car elle possède un coefficient diagonal nul (en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique, cela se traduit par $\varphi(e_2, e_2) = 0$, ce qui contredit le caractère défini d'un produit scalaire, puisque $e_2 \neq 0$).
   - Soit φ la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice M_3. La forme bilinéaire φ est symétrique car M_3 est une matrice symétrique. De plus, en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a
     $$\begin{aligned} \varphi(X, X) &= x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 2xy + 2xz + 2yz \\ &= (x - y + z)^2 + y^2 + 5z^2 + 4yz \\ &= (x - y + z)^2 + (y + 2z)^2 + z^2. \end{aligned}$$
     Ainsi, pour tout X de $\mathbb{R}^3$, $\varphi(X, X) \geqslant 0$ (en tant que somme de termes positifs), et une somme de termes positifs étant nulle si et seulement si chacun de ces termes est nul, on obtient l'équivalence :
     $$\varphi(X, X) = 0 \iff \begin{cases} (x - y + z)^2 &= 0 \\ (y + 2z)^2 &= 0 \\ z^2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \iff X = 0.$$
     Ainsi, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire}}$.
4. Soit x et y deux vecteurs d'un espace E muni d'un produit scalaire. Alors $x \perp y$ si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
   Démonstration : on a :
   $$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle .$$
   Ainsi, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si et seulement si $2\langle x, y\rangle = 0$, si et seulement si $\langle x, y\rangle = 0$, si et seulement si $x \perp y$, par définition de l'orthogonalité.
5. (a) Soit d le degré de P, et $a \neq 0$ son coefficient dominant. On a alors
   $$P(n) \underset{+\infty}{\sim} an^d \underset{+\infty}{\sim} an(n - 1)(n - 2) \cdots (n - d + 1).$$
   Ainsi,
   $$\frac{P(n)}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{(n - d)!}.$$

La série de terme général $\frac{a}{(n-d)!}$ étant à termes de signe constant (le signe étant celui de a), il en est de même, au moins à partir d'un certain rang, de la série de terme général $\frac{P(n)}{n!}$. De plus, la série de terme général $\dfrac{a}{(n-d)!}$ $(n \geqslant d)$ est, à un changement d'indices près, égale à la série de terme général $\frac{a}{n!}$, qui est une série exponentielle, donc convergente. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs par équivalence, $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{P(n)}{n!} \text{ converge.}}$

(b) • Soit P et Q deux polynômes à coefficients réels. Alors PQ est encore en polynôme, et d'après la question précédente, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)Q(n)}{n!}$ est convergente. Ainsi, la quantité $\langle P, Q\rangle$ est bien définie pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$.

• Toutes les convergences étant assurées par la question précédente, on a, pour tous polynômes P, Q et R, et tout réel λ :

$$\langle \lambda P + Q, R\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda P(n) + Q(n))R(n)}{n!} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)R(n)}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q(n)R(n)}{n!} = \lambda \langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle .$$

Ainsi, $\langle ., .\rangle$ est linéaire par rapport à se première variable.

• De plus, $\langle ., .\rangle$ est clairement symétrique, par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.

• Ainsi, étant symétrique et linéaire par rapport à une variable, elle est aussi linéaire par rapport à la seconde variable.

• Étant donné P dans $\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(n)^2}{n!} \geqslant 0,$$

comme somme de termes positifs, et on a égalité si et seulement chaque terme est nul, donc si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = 0.$$

Cette dernière condition équivaut à $P = 0$, car le polynôme nul est le seul polynôme à posséder une infinité de racines.

Ainsi, $\langle ., .\rangle$ est définie positive.

Par conséquent, $\langle ., .\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est donc un $\boxed{\text{produit scalaire}}$.

6. • Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Le complexe λ est valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ 3-\lambda & = & - \\ \lambda & (& 3 \end{pmatrix} - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}}$.

• La matrice A est d'ordre 2, et admet deux valeurs propres distinctes. Elle est donc $\boxed{\text{diagonalisable}}$, et chacun de ses deux espaces propres E_1 et E_2 est de dimension 1.

• On a $A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 + C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1$, et E_1 étant de dimension 1, on en déduit que $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

• On a $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 + 2C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_2$, et E_2 étant de dimension 1, on en déduit que $\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$.

• Ainsi, en posant $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$, on a, d'après la formule de changement de base,

$$\boxed{A = PDP^{-1}}.$$