Correction de l'interrogation n° 6

Correction de l'exercice 1 – Soit a un réel, et soit Soit f la fonction définie sur $]-1,3]$ par $f(x)=\dfrac{a}{\sqrt{x+1}}$, et nulle sinon.

1. • La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$.
   • L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{3}\frac{a}{\sqrt{t+1}}\ \mathrm{d}t$ est impropre en -1 seulement (car la fonction intégrée est continue sur $]-1,3]$, et en -1, il s'agit d'une intégrale de Riemann de paramètre $\frac{1}{2}$, donc convergente. Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, et
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \Big[2a\sqrt{x+1}\Big]_{-1}^{3} = 4a.$$
   Une condition nécessaire pour que f soit une densité, est donc que $a=\frac{1}{4}$.
   • Si $a=\frac{1}{4}$, alors f est positive sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, $\boxed{a=\frac{1}{4}}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une densité de probabilité.
2. Comme la densité de X est à support borné, X admet une espérance et une variance.
   • D'après le second théorème de transfert, $x\mapsto x+1$ étant continue (et $E(X+1)$ existant puisque $E(X)$ existe),
   $$E(X+1)=\int_{-1}^{3}\frac{(x+1)}{4\sqrt{x+1}}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{3}\sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\Big[(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-1}^{3}.$$
   Ainsi, $\boxed{E(X+1)=\frac{4}{3}.}$
   • On en déduit que $\boxed{E(X)=\frac{1}{3}}$.
   • De même, on déterminer $E((X+1)^2)$ avec le second théorème de transfert :
   $$E((X+1)^2)=\frac{1}{4}\int_{-1}^{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\Big[(x-1)^{\frac{5}{2}}\Big]_{-1}^{3}=\frac{16}{5}.$$
   • On a alors, d'après la formule de König-Huygens :
   $$V(X)=V(X+1)=E((X+1)^2)-E(X+1)^2=\frac{16}{5}-\frac{16}{9},$$
   d'où $\boxed{V(X)=\frac{64}{45}.}$
3. La fonction $x\mapsto \mathrm{e}^x$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le premier théorème de transfert, qui affirme dans une premier temps que e^X est bien une variable à densité. De plus, φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et φ^{-1} est donc la fonction ln, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Le premier théorème de transfert permet donc de donner une densité f_{e^X} et e^X :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_{\mathrm{e}^X}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ \frac{1}{x}f(\ln x) & \text{si } x>0.\end{cases}$$
   Or, pour tout $x>0$,
   $$f(\ln x)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{\ln x+1}} & \text{si } \ln x\in]-1,3],\ \text{donc si } x\in]\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^3]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$
   On obtient donc :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad \boxed{f_{\mathrm{e}^X}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4x\sqrt{1+\ln x}} & \text{si } x\in]\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^2]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}}$$

4. Ici, le théorème de transfert n'est pas applicable. On revient à la définition de la fonction de répartition. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :
$$F_{X^2}(y) = P(X^2 \leqslant y).$$
Ainsi,
   - Si $y < 0$, $[X^2 \leqslant y]$ est l'événement impossible, donc
$$P(X^2 \leqslant y) = 0.$$
   - Si $y \geqslant 0$,
$$F_{X^2}(y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

   Comme F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ (car f est continue sur ce domaine), F_{X^2} est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout y de $\mathbb{R}$ ne vérifiant pas $\pm\sqrt{y} = -1$ et $\pm\sqrt{y} = 3$, ainsi que $y = 0$ (point de jonction des deux domaines). Ainsi, F_{X^2} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 9\}$. Comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient, par composition, la continuité de F_{X^2} sur $\mathbb{R}^*$. De plus,
$$\lim_{x \to 0^+} F_{X^2}(x) = F_X(0) - F_X(0) = 0 = \lim_{x \to 0^-} F_{X^2}(x) = F_{X_2}(0),$$
   (la première égalité provenant de la continuité de F_X). Ainsi, F_{X^2} est aussi continue en 0. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, pour X^2 est une variable à densité. Une densité de X^2 est alors :
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_{X^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) & \text{si } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Or, $f(-\sqrt{y})$ est nulle si $-\sqrt{y} \leqslant -1$, donc si $y \geqslant 1$, et $f(\sqrt{y})$ est nul si $\sqrt{y} > 3$, donc si $y > 9$ On obtient donc la densité suivante :
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_{X^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{y}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{y}}}\right) & \text{si } y \in [0, 1[\\ \frac{1}{4\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{y}}} & \text{si } y \in [1, 9], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Correction de l'exercice 2 –

1.
   - La fonction φ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]^2$, car pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la fonction $x \mapsto P(x)Q(x) \sin x$ est continue sur $[0, \pi]$, donc intégrable.
   - La fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2[X]$ est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.
   - La bilinéarité de φ provient des propriétés de distributivité et de la linéarité de l'intégrale.
   - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors
$$\varphi(P, P) = \int_0^{\pi} P^2(x) \sin x \, \mathrm{d}x.$$
     Or, la fonction $x \mapsto P^2(x) \sin x$ est positive sur $[0, \pi]$, donc $\varphi(P, P) \geqslant 0$.
   - De plus, $x \mapsto P^2(x) \sin x$ étant positive et continue sur $[0, \pi]$, par stricte positivité de l'intégrale, $\varphi(P, P) = 0$ si et seulement si pour tout $x \in [0, \pi]$, $P^2(x) \sin x = 0$. Comme sin ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, on en déduit que
$$\forall x \in]0, \pi[, \quad P(x) = 0.$$
     Ainsi, P est un polynôme ayant une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Ainsi, $\varphi(P, P) = 0$ si et seulement si $P = 0$.

   Par conséquent, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. $\boxed{\text{C'est donc un produit scalaire.}}$

2. Pour tout $(i,j) \in [\![0,2]\!]$, $\langle X^i, X^j \rangle = \displaystyle\int_0^\pi x^{i+j} \sin x \, \mathrm{d}x$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^\pi x^n \sin x.$$

On a alors

$$\mathrm{Mat}_{bc}(\varphi) = \begin{pmatrix} I_0 & I_1 & I_2 \\ I_1 & I_2 & I_3 \\ I_2 & I_3 & I_4 \end{pmatrix}.$$

Il faut donc déterminer I_n, pour $n \in [\![0,4]\!]$:

- $I_0 = \displaystyle\int_0^\pi \sin t \, \mathrm{d}t = \left[-cost \right]_0^\pi = 2.$
- À l'aide d'une intégration par parties, $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\cos t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$:

$$I_1 = \int_0^\pi t \sin t \, \mathrm{d}t = \Big[-t\cos t \Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t \, \mathrm{d}t = \pi.$$

- À l'aide de deux intégrations par parties, $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto -\sin t$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$:

$$I_2 = \int_0^\pi t^2 \sin t \, \mathrm{d}t = \Big[-t^2\cos t \Big]_0^\pi + \int_0^\pi 2t\cos t \, \mathrm{d}t = \pi^2 + \Big[2t\sin t \Big]_0^\pi - 2\int_0^\pi \sin t \, \mathrm{d}t = \pi^2 - 2I_0.$$

  Ainsi $I_2 = \pi^2 - 4$.
- À l'aide de deux intégrations par parties, $t \mapsto t^3$ et $t \mapsto -\sin t$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$:

$$I_3 = \int_0^\pi t^3 \sin t \, \mathrm{d}t = \Big[-t^3\cos t \Big]_0^\pi + \int_0^\pi 3t^2\cos t \, \mathrm{d}t = \pi^3 + \Big[3t^2\sin t \Big]_0^\pi - 6\int_0^\pi t\sin t \, \mathrm{d}t = \pi^3 - 6I_1.$$

  Ainsi $I_3 = \pi^3 - 6\pi$.
- À l'aide de deux intégrations par parties, $t \mapsto t^4$ et $t \mapsto -\sin t$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$:

$$I_4 = \int_0^\pi t^4 \sin t \, \mathrm{d}t = \Big[-t^4\cos t \Big]_0^\pi + \int_0^\pi 4t^3\cos t \, \mathrm{d}t = \pi^4 + \Big[4t^3\sin t \Big]_0^\pi - 12\int_0^\pi t^2\sin t \, \mathrm{d}t = \pi^4 - 12I_2.$$

  Ainsi $I_4 = \pi^4 - 12\pi^2 + 48$.

On obtient donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{bc}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & \pi & \pi^2-4 \\ \pi & \pi^2-4 & \pi^3-6\pi \\ \pi^2-4 & \pi^3-6\pi & \pi^4-12\pi^2+48. \end{pmatrix}}.$$

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ de ce produit scalaire que l'on notera indifféremment φ ou $\langle .,. \rangle$. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. On orthonormalise la base $(1,X)$ de $\mathrm{Vect}(1,X)$. On note (f_1,f_2) la base orthonormale obtenue.
   - On a $\|1\|^2 = \langle 1,1 \rangle = I_0 = 2$, donc $\boxed{f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.
   - Soit $u_2 = X - \dfrac{1}{2}\langle X,1 \rangle 1 = X - I_1 = X - \dfrac{\pi}{2}$. On a alors

$$\|u_2\|^2 = \langle X,X \rangle - 2\cdot\frac{\pi}{2}\langle X,1 \rangle + \frac{\pi^2}{4}\langle 1,1 \rangle = \pi^2 - 4 - \pi^2 + \frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{2}(\pi^2 - 8).$$

   Ainsi, $f_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^2-8}}(X - \dfrac{\pi}{2})$

4. On calcule $p(1)$, $p(X)$ et $p(X^2)$.
   - $p(1) = 1$, car $1 \in \mathrm{Vect}(1,X)$;
   - $p(X) = X$, car $X \in \mathrm{Vect}(1,X)$;
   - $p(X^2) = \dfrac{1}{2}\langle X^2, 1 \rangle 1 + \dfrac{2}{\pi^2-8}\left\langle X^2, X - \dfrac{\pi}{2} \right\rangle = \dfrac{1}{2}(\pi^2-4) + \dfrac{2}{\pi^2-8}\left(\pi^3 - 6\pi - \dfrac{\pi}{2}(\pi^2-4)\right)\left(X - \dfrac{\pi}{2}\right)$.
   Ainsi,

$$p(X^2) = \frac{1}{2}(\pi^2-4) + \frac{2}{\pi^2-8}\left(\frac{\pi^3}{2} - 4\pi\right)\left(X - \frac{\pi}{2}\right) = \pi\left(X - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}(\pi^2-4) = \pi X - 2.$$

Par conséquent,

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

5. Il suffit pour cela de procéder à l'orthonormalisation de $(1, X, X^2)$, les deux premiers vecteurs de cette orthonormalisation étant alors (f_1, f_2), d'après les calculs précédents. L'étape suivante de l'orthonormalisation consiste à déterminer un vecteur u_3 orthogonal à $\mathrm{Vect}(1, X)$, puis à le diviser par sa norme. Cette dernière normalisation est inutile ici, puisqu'on ne demande qu'une base orthogonale et non orthonormale. On se contente donc de calculer u_3, en constatant que l'essentiel des calculs a été effectué dans le question précédente, puisque
$$\boxed{u_3 = X^2 - p(X^2) = X^2 - \pi X + 2}.$$
Ainsi, (f_1, f_2, u_3) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.
La matrice P recherchée n'est pas unique. J'en donne une, à mon avis la plus simple. La famille $\mathcal{B} = (1, X, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (car échelonnée en degré), et, comme on l'a déjà vu, $p(1) = 1$, $p(X) = X$, et puisque (f_1, f_2, u_3) est une base orthogonale, $u_3 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2)^\perp = \mathrm{Vect}(1, X)^\perp$, donc $p(u_3) = 0$.
Ainsi, la matrice de p dans la base $(1, X, u_3)$ est
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Soit alors P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire :
$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\pi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$
D'après la formule de changement de base, on a bien :
$$\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . \end{pmatrix}}$$