Probabilités 1 – Probabilités générales : révisions

Correction de l'exercice 3 –
Première méthode
Voyons cet exercice à la lumière des variables aléatoires et des lois classiques. Soit X la vard correspondant au nombre de boules blanches tirées. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, où $p = \frac{a}{a+b}$. L'événement A : « tirer un nombre pair de boules blanches » correspond donc à l'événement suivant :

$$A = \bigcup_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ pair}}} [X = k].$$

Les événements constituant cette union sont deux à deux incompatibles, donc on peut écrire :

$$P(A) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ pair}}} P(X=k) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^k \right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + (1-2p)^n\right) = \frac{1}{2}\left(1 + (\frac{b-a}{a+b})^n\right).$$

Deuxième méthode
On appelle A_n l'événement « tirer un nombre pair de boules blanches sur n boules tirées ».
On appelle B_n l'événement : « La n-ième boule tirée est blanche ».
On distingue selon la couleur de la dernière boule tirée. Autrement dit, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet $(B_n, \overline{B_n})$:

$$P(A_n) = P(A_n|B_n)P(B_n) + P(A_n|\overline{B_n})P(\overline{B_n}).$$

Or, réaliser A_n sachant B_n (donc sachant que la dernière boule tirée est blanche) revient à tirer un nombre impair de boules parmi les $n-1$ premières, donc à réaliser $\overline{A_{n-1}}$. De même, réaliser A_n sachant que la dernière boule tirée est noire revient à réaliser A_{n-1}. Ainsi :

$$P(A_n) = (1 - P(A_{n-1}))p + P(A_{n-1})(1-p).$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(A_n)$. Alors $p_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} = (1-p_n)p + p_n(1-p) = p_n(1-2p) + p.$$

Ainsi, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Cherchons $c \in \mathbb{R}$ tel que $(p_n - c)$ soit géométrique. Soit donc $c \in \mathbb{R}$, et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n - c$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = p_{n+1} - c = p_n(1-2p) + p - c = u_n(1-2p) + p + c(1-2p) - c = u_n(1-2p) + p - 2pc.$$

Il suffit de poser $c = \frac{1}{2}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1-2p$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0(1-2p)^n = \left(p_0 - \frac{1}{2}\right)(1-2p)^n = \frac{1}{2}(1-2p)^n \qquad \text{puis:} \qquad p_n = \frac{1}{2}(1-2p)^n + \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 6 – Soit $n \geqslant 1$. La probabilité qu'une famille ait exactement n enfants est $p_n = \alpha p^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $p \in]0,1[$.

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement : la famille a n enfants. Alors :

$$\overline{A_0} = \bigcup_{n \in NN^*} A_n,$$

ces événements étant deux à deux incompatibles. Ainsi :

$$P(\overline{A_0}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} ap^n.$$

Cette série converge effectivement (série géométrique de raison $p \in [0,1[$, et on trouve :

$$P(\overline{A_0}) = \frac{ap}{1-p}.$$

Puisque $P(\overline{A_0}) \leqslant 1$, on en déduit que $\frac{ap}{1-p} \leqslant 1$, puis que $ap \leqslant 1-p$, puis que $a+1 \leqslant \frac{1}{p}$.

2. Notons, pour tout $S \in \mathbb{N}$, B_S l'événement avoir S garçons.
Soit $S \in \mathbb{N}$.
On considère le système complet $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chacun de ces événements n'étant pas quasi-impossible. Alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_S) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_S \mid A_n)P(A_n).$$

Or :
- si $n < S$, alors $P(B_S \mid A_n) = 0$;
- si $n \geqslant S$, le nombre de garçons suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Ainsi $P(B_S \mid A_n) = \binom{n}{S}\frac{1}{2^n}$.
(sans passer par les lois classiques : $\binom{n}{S}$ correspond au choix de la position des garçons dans la fratrie, et $\frac{1}{2}$ à la probabilité pour chaque enfant que ce soit une fille ou un garçon, tel que souhaité.)
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = ap^n$;
- $p(A_0) = 1 - \frac{ap}{1-p}$.

Ainsi :
- si $S = 0$:

$$P(B_0) = 1-\frac{ap}{1-p}+a\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\binom{n}{0}\left(\frac{p}{2}\right)^n = 1-\frac{ap}{1-p}+a\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{p}{2}\right)^n = 1-\frac{ap}{1-p}+\frac{ap}{2-p} = 1-\frac{ap}{(1-p)(2-p)}.$$

- Si $S > 0$:

$$P(B_S) = \sum_{n=S}^{+\infty}\binom{n}{S}\left(\frac{p}{2}\right)^n = \left(\frac{p}{2}\right)^S\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+S}{S}\left(\frac{p}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^S}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{S+1}} = \frac{2p^S}{(2-p)^{S+1}},$$

d'après la formule du binôme négatif (dérivation de la série géométrique).

Correction de l'exercice 12 –

1. (a) Définissons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement :
P_k : « Obtenir Pile au k-ième tirage »
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_{n-1}} \cap P_n$.
Or les tirages sont mutuellement indépendants, donc les événements $\overline{P_1}, \ldots, \overline{P_{n-1}}, P_n$ sont mutuellement indépendants. Ainsi, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(A_n) = P(\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_{n-1}} \cap P_n) = P(\overline{P_1})\cdots P(\overline{P_{n-1}})P(P_n) = \frac{1}{2^n}.$$

(b) Les événements A_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux incompatibles. De plus, il sont non vides (il existe une succession de tirage amenant chacun de ces événements). Enfin, comme ils sont deux à deux incompatibles, on peut écrire, d'après la σ-additivité de P :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Ainsi, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet.
L'événement consistant à n'obtenir que des Faces n'est dans aucun des événements A_n, donc il ne s'agit pas d'un système complet.

2. (a) Tout d'abord, remarquez que les événements B_i ne sont pas indépendants puisque plus on a rajouté de boule noire, plus la probabilité de tire une boule blanche est faible. Pour calculer la probabilité de l'intersection, nous allons donc utiliser la formule des probabilités conditionnelles. Nous obtenons :

$$P(\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{j-1}}\cap B_j\cap\overline{B_{j+1}}\cap\cdots\cap\overline{B_n}) =$$
$$= P(\overline{B_1})\left(\prod_{k=2}^{j-1} P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(\overline{B_k})\right)\cdot P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{j-1}}}(B_j)\cdot\left(\prod_{k=j+1}^{n} P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{j-1}}\cap B_j\cap\overline{B_{j+1}}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(\overline{B_k})\right).$$

Calculons ces probabilités conditionnelles :

- Initialement, il y a autant de boules blanches que de boules noires. Donc $P(\overline{B_1})=\frac{1}{2}$.
- Soit $k\in[\![2,j-1]\!]$. Alors, si l'événement $\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}$ s'est produit, avant de tirer la k-ième boule, on n'a tiré que des boules noires, qui ont été remises à chaque fois dans l'urne. Le contenu de l'urne n'a donc pas été modifié. Ainsi, au moment d'effectuer le k-ième tirage, il y a autant de boules blanches que de boules noires, donc
$$P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(\overline{B_k})=\frac{1}{2}.$$
- De même, si on n'a tiré que des boules noires avant, on a une chance sur 2 de tirer une boule blanche au j-ième tirage, donc
$$P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{j-1}}}(B_j)=\frac{1}{2}.$$
- Enfin, soit $k\in[\![j+1,n]\!]$. Si l'événement $\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{j-1}}\cap B_j\cap\overline{B_{j+1}}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}$ est réalisé, alors avant le k-ième tirage, on n'a tiré que des boules noires, qui ont été remises dans l'urne, à l'exception d'une boule blanche tirée, qui a été retirée. Ainsi, au moment d'effectuer le k-ième tirage, il reste dans l'urne 4 boules blanches et 5 boules noires. Ainsi
$$P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{j-1}}\cap B_j\cap\overline{B_{j+1}}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(\overline{B_k})=\frac{5}{9}.$$

On en déduit que
$$P(\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{j-1}}\cap B_j\cap\overline{B_{j+1}}\cap\cdots\cap\overline{B_n})=\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{5}{9}\right)^{n-j}.$$

(b) L'événement B est réalisé si et seulement si un des événements B_i est réalisé (ce qui correspond au choix de la position de tirage de l'unique boule blanche). Ainsi, les événements B_i, $i\in[\![1,n]\!]$ étant deux à deux incompatibles,
$$\begin{aligned}P(B)&=P\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right)=\sum_{j=1}^n P(B_j)=\sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{5}{9}\right)^{n-j}\\&=\left(\frac{5}{9}\right)^n\sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{9}{5}\right)^j=\left(\frac{5}{9}\right)^n\sum_{j=1}^n\left(\frac{9}{10}\right)^j\\&=\left(\frac{5}{9}\right)^n\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^n}{1-\frac{9}{10}}=9\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n\cdot\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right).\end{aligned}$$

3. (a) Le résultat de la question 2 s'écrit, en la transcrivant dans le contexte de la question 3 :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, P_{A_n}(B)=9\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n\cdot\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right).$$

Or, la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet. On peut donc utiliser la formule des probabilités totales (qui fournit en particulier la convergence de la série, sans autre justification à fournir) :
$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{n=1}^{+\infty}P_{A_n}(B)P(A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}9\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n\cdot\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&9\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{18}\right)^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\\&=9\left(\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{18}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)=9\left(\frac{5}{13}-\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{13}.\end{aligned}$$

(b) On peut utiliser la formule de Bayes (pour remonter le temps), ou ici, plus simplement, la définition des probabilités conditionnelles, puisqu'on a déjà calculé $P(B)$ (la formule de Bayes nous fait refaire le calcul précédent). Ainsi :

$$P_B(A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P_{A_1}(B)P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{6}{13}} = \frac{13}{24}.$$

Correction de l'exercice 15 – Soit $\Omega = [\![1,6]\!]^n$. Un résultat de l'expérience correspond donc au n-uplet des valeurs tirées pour chaque dé, en supposant que l'on a numéroté les dés de 1 à n (ce que l'on peut toujours décider de faire, sans modifier la probabilité recherchée). N'ayant pas d'hypothèse sur les dés, on peut raisonnablement supposer qu'ils sont tous équilibrés, donc que tous les tirages de Ω sont équiprobables.
Soit Ω_1 l'ensemble des tirages de Ω donnant une somme impaire, et Ω_2 l'ensemble des tirages de Ω donnant une somme paire. Alors (Ω_1, Ω_2) forme une partition de Ω. De plus, il existe une bijection φ entre Ω_1 et Ω_2 donnée par :

$$\forall (x_1, \dots, x_6) \in \Omega_1, \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_6) = \begin{cases} (x_1+1, x_2, \dots, x_6) & \text{si } x_1 \text{ est impair,} \\ (x_1-1, x_2, \dots, x_6) & \text{si } x_1 \text{ est pair} \end{cases}$$

(on remplace la valeur du premier dé respectivement par 2,4 ou 6 si sa valeur initiale est 1, 3 ou 5, et inversement ; on change bien la parité de la somme ce faisant) Il s'agit bien d'une bijection, car en refaisant la même opération, on retombe sur le sextuplet initial (ce qui permet de construire une réciproque).
Ainsi, $|\Omega_1| = |\Omega_2|$, et $|\Omega_1| + |\Omega_2| = |\Omega|$. Donc $|\Omega_2| = \frac{1}{2}|\Omega|$. Ainsi, d'après la formule de Laplace, la probabilité d'obtenir une somme paire est :

$$p = \frac{|\Omega_2|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1}{2}|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 19 – Le problème du chevalier de Méré – On jette un dé n fois de suite.

1. On prend l'événement complémentaire. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   - A_n l'événement « obtenir au moins un 6 dans les n lancers »
   - B_n l'événement « obtenir un 6 au n-ième lancer »

   Ainsi, n étant fixé :
   $$\overline{A_n} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_n},$$
   et, les lancers de dé étant mutuellement indépendants :
   $$P(\overline{A_n}) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{B_k}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
   Ainsi, $P(A_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   On résout l'équation $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant \frac{1}{2}$, soit $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}$ soit $n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln 6 - \ln 5}$. On trouve $n \geqslant 3.8...$ Ainsi, la plus petite valeur (entière) de n est 4.
2. La probabilité d'avoir exactement une fois 6 est $\binom{6}{1}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ (choix de la position du succès, puis probabilité du succès positionné, et de chacun des échecs). On peut aussi remarquer que X, le nombre de 6 obtenus suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{6})$.
   Ainsi, la probabilité d'obtenir au moins deux 6 est :
   $$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=1) - P(X=0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$
3. La probabilité d'obtenir un double-6 sur un tirage donné est $\frac{1}{36}$. Le même raisonnement que ci-dessus amène donc :
   $$p'_n = 1 - (\frac{35}{36})^n.$$

4. On compare à l'aide des valeurs numériques approchées données par une calculatrice :

$$p_4 \equiv 0.517 \qquad \text{et} \qquad p'_{24} \equiv 0.491.$$

Donc en 24 tirages, on a moins d'une chance sur deux d'avoir un double-6.

Le résultat étonne le chevalier de Méré (à moins qu'il se soit laissé prendre à son jeu sans réfléchir) car son raisonnement est le suivant : En 4 tirages, j'ai plus d'une chance sur 2 de tirer un 6 avec un dé, disons le premier dé. Pour chaque 6 obtenu, j'ai une chance sur 6 que l'autre dé ait aussi un 6. Donc, en prenant 6 fois plus de tirages, j'ai également plus d'une chance sur 2 d'obtenir un double-6 (que le deuxième dé ait aussi un 6).

Où est l'erreur dans ce raisonnement ? C'est une erreur grossière : M. de Méré somme les probabilité pour obtenir la probabilité d'une union d'événements non deux à deux incompatibles (obtenir un 6 au 1er, 2e... tirage donnant un 6 avec l'autre 2). Ainsi, selon lui, on a l'assurance d'obtenir au moins une fois un 6 avec le deuxième dé dès lors qu'on a obtenu six 6 avec le premier !...

Correction de l'exercice 20 – Le problème du tournoi

1. (a) Il est sous-entendu dans l'énoncé que les lancers sont indépendants.

On définit des événements, pour tout $k \in [\![1,3]\!]$:
B_k : « le k-ième lancer est gagnant pour A_1 »
et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$: C_k : « le k-ième joueur gagne le concours »
Ainsi, l'événement C_1 est $C_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Les lancers étant indépendants,

$$p_1 = p(C_1) = p(A_1)p(A_2)p(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

De la même façon, pour tout $n \geqslant 1$, $P(C_n \mid \overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{n-1}}) = \frac{1}{8}$ (probabilité que le n-ième joueur gagne, sachant que les $n-1$ premiers ont perdu, donc que l'affrontement entre A_n et A_{n+1} a lieu).

Ainsi, en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet $(A_1, \overline{A_1})$,

$$p_2 = P(C_2) = P(C_2 \mid C_1)P(C_1) + P(C_2 \mid \overline{C_1})P(\overline{C_1}) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{16},$$

puisque $P(C_2 \mid C_1) = 0$ (A_2 ne peut pas gagné si A_1 a gagné).

(b) On ne change rien aux probabilités en modifiant l'expérience comme suit : au lieu de s'arrêter lorsqu'on a un gagnant, on continue les affrontements, le n-ième affrontement ayant lieu entre A_n et A_{n+1}. Évidemment, si A_n gagne contre A_{n+1} alors qu'un joueur précédent a gagné, il n'est pas déclaré vainqueur du tournoi. Sous cette convention, ce qu'il se passe après la victoire d'un joueur ne change rien au résultat de l'expérience.

Compléter l'expérience de la sorte permet de considérer des événements qui ne pourraient pas avoir lieu sinon. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D_n l'événement A_n gagne ses trois manches contre A_{n-1}. Alors, d'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(D_n) = \frac{1}{8}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut exprimer l'événement C_n en fonction des événements $(D_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$: $C_n = \overline{D_1} \cap \cdots \cap \overline{D_{n-1}} \cap D_n$. Or, les lancers étant indépendants, les événements $D_1, \dots, D_n$ sont indépendants. Ainsi

$$p_n = P(C_n) = P(\overline{D_1}) \cdots P(\overline{D_{n-1}}) \cdot P(D_n) = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n.$$

(c)
```
program dm8quII1c;
uses crt;

var S,u:real;
    k,n:integer;

begin
  clrscr;
  writeln('Entrez la borne supérieure de l'indice de la somme à calculer');
```

```
  readln(n);
  S:=0;
  u:= 1/8;
  for k:=1 to n do
    begin
      S:=S+u;
      u:=u*7/8;
    end;
  writeln('S',n,'=',S);
end.
```

Comme vous le constatez, on préfère calculer la suite géométrique par récurrence, plutôt que de la recalculer explicitement à chaque fois, ce qui obligerait à faire une boucle dans la boucle pour calculer la puissance.

Principe général : il peut être intéressant de calculer une somme en se servant d'une relation de récurrence de la somme partielle

(d) Soit C l'événement : « il y a un vainqueur ». Ainsi,

$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} C_k.$$

Les événements $(C_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ formant une suite d'événements deux à deux incompatibles,

$$P(C) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(C_k) = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} = \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{7}{8}} = 1.$$

Ainsi, il y a presque sûrement un vainqueur. La probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur est donc 0.

2. (a) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_n l'événement : « le n-ième joueur est vainqueur ».

Soit $n \geqslant 5$. S'il n'y a pas encore eu de vainqueur à ce moment, le joueur A_n joue à la $n-1$-ième manche. S'il gagne, il doit gagner les trois manches suivantes, donc $n-1$, n et $n+1$. Remarquez que le gain de ces trois manches implique que A_{n-1} et A_{n-2} ne peuvent pas gagner (car ils devraient gagner la manche $n-1$). Ainsi, A_n gagne si et seulement si A_k perd pour tout $k \leqslant n-2$ et si les trois manches de A_n sont gagnées. Notons A l' événement « A_n remporte ses trois manches » (quitte à continuer le tournoi après obtention d'un vainqueur, cet événement a un sens). Alors

$$C_n = \bigcap_{k=1}^{n-3} \overline{C_k} \cap A.$$

L'événement $\bigcap_{k=1}^{n-3} \overline{C_k}$ ne dépend que des lancers de 1 à $n-2$, alors que A ne dépend que des lancers $n-1$, n et $n+1$. Comme les lancers sont indépendants, $\bigcap_{k=1}^{n-3} \overline{C_k}$ et A sont indépendants. Donc :

$$P(C_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n-3} \overline{C_k}\right) \cdot P(A) = \frac{1}{8} P\left(\bigcap_{k=1}^{n-3} \overline{C_k}\right) = \frac{1}{8}\left(1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n-3} C_k\right)\right).$$

Or, les événements $(C_k)_{k\in[\![1,n-3]\!]}$ sont deux à deux incompatibles, donc :

$$P(C_n) = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-3} P(C_k)\right).$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 5$, $q_n = \dfrac{1}{8}\left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-3} q_k\right)$.

Remarquez que contrairement à ce que prétend l'énoncé, cette formule n'est pas vraie pour $n = 4$, le problème étant que la victoire de A_1 dépend des lancers 1, 2 et 3, qui ne sont pas indépendants des lancers déterminant la victoire du joueur 4. Ainsi, la relation n'est vraie qu'à partir de $n = 5$.

Initialisons-la en trouvant les valeurs de q_n pour $n \in [\![1, 4]\!]$.
A_1 gagne si et seulement s'il gagne les 3 premières manches, donc $q_1 = \frac{1}{8}$;
A_2 gagne si et seulement s'il gagne les 3 premières manches, donc $q_2 = \frac{1}{8}$;
A_3 gagne si et seulement s'il gagne les manches 2, 3 et 4, quel que soit le vainqueur de la manche 1, donc $q_3 = \frac{1}{8}$;
A_4 gagne si et seulement s'il gagne les manches 3, 4 et 5, quels que soient les vainqueurs des manches 1 et 2, donc $q_4 = \frac{1}{8}$;

(b) Soit $n \geqslant 6$. Alors $q_n = \dfrac{1}{8}\left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-3} q_k\right)$ et $q_{n-1} = \dfrac{1}{8}\left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-4} q_k\right)$. Par conséquent, $q_n - q_{n-1} = -\frac{1}{8} \cdot q_{n-3}$.
Ainsi :

$$\forall n \geqslant 6, q_n = q_{n-1} - \frac{1}{8} \cdot q_{n-3}.$$

Pour que cette relation détermine $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, il nous faut donc les valeurs de $(q_n)_{n \in [\![1,5]\!]}$. Il ne nous manque que :

$$q_5 = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{32}.$$

(c)
```
program dm8quII2c;

var u,v,w,tampon:real;
    n,k:integer;

begin
  writeln('Entrez une valeur de n:');
  readln(n);
  if n=1 then writeln('u1=0.125');
  if n=2 then writeln('u2=0.125');
  if n=3 then writeln('u3=0.125');
  if n=4 then writeln('u4=0.125');
  if n=5 then writeln('u5=0.09375');
  if n >=6 then
    begin
      u:=1/8;            {Les trois valeurs aux rangs 3,4,5}
      v:=1/8;
      w:=3/32;
      for k:=6 to n do
        begin
          tampon:=w-u/8; {calcul du terme suivant}
          u:=v;          {glissement de variables, pour que les variables}
          v:=w;          {contenant initialement les rangs n-3, n-2 et n-1}
          w:=tampon;     {contiennent à la fin les rangs n-2, n-1 et n}
        end;
      writeln('u',n,'=',w);
    end;
end.
```

(d) Il s'agit d'expliciter cette suite récurrente. Cherchons donc les racines de son polynôme caractéristique $P = X^3 - X^2 + \frac{1}{8}$. Il y a une racine évidente : $r_1 = \frac{1}{2}$. Ainsi :

$$P = (X - \frac{1}{2})(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4})$$

On trouve alors les deux autres racines en calculant $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$. Ainsi, les trois racines sont :

$$r_1 = \frac{1}{2}, \qquad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}, \qquad r_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Ainsi, il existe des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$$\forall n \geqslant 3, q_n = \lambda_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-3} + \lambda_3 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-3};$$

(le choix de l'exposant n'est pas très important, il suffit de rentrer trois facteurs dans la constante ; ce choix est destiné à simplifier les calculs de λ_1, λ_2 et λ_3).
On trouve λ_1, λ_2 et λ_3 grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{8} & = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \dfrac{1}{8} & = \dfrac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} + \lambda_3 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \\ \dfrac{3}{32} & = \dfrac{\lambda_1}{4} + \lambda_2 \cdot \dfrac{(1-\sqrt{5})^2}{16} + \lambda_3 \cdot \dfrac{(1+\sqrt{5})^2}{16} = \dfrac{\lambda_1}{4} + \dfrac{3-\sqrt{5}}{8} \cdot \lambda_2 + \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}\lambda_3. \end{cases}$$

De la première équation on tire : $\lambda_1 = \frac{1}{8} - \lambda_2 - \lambda_3$, d'où le système vérifié par (λ_2, λ_3) :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{8} & = \dfrac{1}{16} - \lambda_2 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} - \lambda_3 \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{3}{32} & = \dfrac{1}{32} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{8} \cdot \lambda_2 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{8}\lambda_3. \end{cases} \quad \text{soit:} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{4} & = -(1+\sqrt{5})\lambda_2 - (1-\sqrt{5})\lambda_3 \\ \dfrac{1}{2} & = (1-\sqrt{5}) \cdot \lambda_2 + (1+\sqrt{5})\lambda_3. \end{cases}$$

On somme ces deux équations : $\dfrac{3}{4} = -2\sqrt{5}\lambda_2 + 2\sqrt{5}\lambda_3$, soit : $\dfrac{3}{8\sqrt{5}} = \lambda_3 - \lambda_2$
On soustrait ces deux équations : $\dfrac{1}{4} = 2\lambda_2 + 2\lambda_3$, soit : $\dfrac{1}{8} = \lambda_2 + \lambda_3$.
Ainsi, en ajoutant puis soustrayant ces deux équations ainsi obtenues :

$$\lambda_3 = \frac{\sqrt{5}+3}{16\sqrt{5}} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{16\sqrt{5}}, \qquad \text{puis:} \qquad \lambda_1 = 0.$$

$$q_n = \frac{\sqrt{5}+3}{16\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-3} + \frac{\sqrt{5}-3}{16\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-3}$$

(e) Les événements $(C_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ étant incompatibles, la probabilité qu'un joueur gagne le tournoi est :

$$\begin{aligned} p = P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} C_i\right) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(C_i) = P(C_1) + P(C_2) + \sum_{n=3}^{+\infty} P(C_n) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}+3}{16\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}} + \frac{\sqrt{5}-3}{16\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{4}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}+3}{16\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{3-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-3}{16\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{3+\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{(\sqrt{5}+3)^2}{16\sqrt{5}} - \frac{(\sqrt{5}-3)^2}{16\sqrt{5}} = \frac{1}{4} + \frac{12\sqrt{5}}{16\sqrt{5}} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur est 0 (événement presque-impossible).