**Probabilités 4 (des corrections)**

**Correction de l'exercice 9** – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-2,1])$.

1. D'après le théorème de transfert, $E(Z)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc si et seulement si $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x$ converge absolument, ce qui est le cas, puisque cette intégrale n'est pas impropre. On a alors :
$$E(Z) = \int_{-2}^{1} \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}(1+8) = 1.$$
De même, $Z$ admet un moment d'ordre 2, donc une variance si et seulement si $E(X^4)$ existe, donc si et seulement si $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x^4}{3}\,\mathrm{d}x$ converge absolument, ce qui est le cas, puisque cette intégrale n'est pas impropre. On a alors :
$$E(Z^2) = \int_{-2}^{1} \frac{x^4}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{15}(1+32) = \frac{33}{15} = \frac{11}{5}.$$
Ainsi, d'après la formule de König-Huygens,
$$V(X) = \frac{11}{5} - 1 = \frac{6}{5}.$$

2. La variable $X$ prend ses valeurs dans $[-2,1]$, donc $Z$ prend ses valeurs dans $[0,4]$. Soit $x \in [0,4]$. On a :
$$P(Z \leqslant x) = P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < X \leqslant \sqrt{x}),$$
car les probabilités ponctuelles sont nulles, $X$ étant une variable à densité. Alors
$$P(Z \leqslant x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}).$$
$F_X$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$, $F_Z$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1,4\}$. De plus, $F_X$ étant continue en 1 et en $-1$, $F_Z$ est continue en 1. Enfin, $F_X$ étant continue en 2 et en $-2$, ainsi qu'en 0, on obtient :
$$\lim_{x\to 0^+} F_Z(x) = F_X(0) - F_X(0) = 0 = F_Z(0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 4^-} F_Z(x) = F_X(2) - F_X(-2) = 1 - 0 = 0 = F_Z(4).$$
Ainsi, $F_Z$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$. Comme elle est continue partout, de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, $Z$ est une variable à densité, et une densité de $Z$ est
$$\forall x \in ]0,4], \quad f_Z(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x}).$$
Ainsi, on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{x}} & \text{si } x \in ]0,1], \\ \frac{1}{6\sqrt{x}} & \text{si } x \in ]1,4], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On a alors
$$E(Z) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{3}\,\mathrm{d}x + \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{6}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\Big[x\sqrt{x}\Big]_0^1 + \frac{1}{9}\Big[x\sqrt{x}\Big]_1^4 = \frac{2}{9} + \frac{7}{9} = 1.$$

On retrouve bien $E(Z) = 1$.

**Correction de l'exercice 10** –

1. La fonction $f$ est positive ssi $a \geqslant 0$. De plus, $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit donc de choisir $a$ de sorte que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente et de valeur 1, donc si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

La fonction $x \mapsto \dfrac{a}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ étant continue sur $[0,+\infty[$, la seule impropreté est en $+\infty$. De plus, au voisinage de $+\infty$ cette fonction est positive, et équivalente à $\frac{a}{x^3}$, dont l'intégrale est convergente en $+\infty$ (intégrale de Riemann). Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a}{(x+1)(x+2)(x+3)}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Effectuons une décomposition de la fraction, soit par identification, soit par l'astuce ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} - \frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = a\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}\right]_0^{\lim_{+\infty}} = -\frac{a}{2}\ln\frac{3}{4} = \frac{a}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

Ainsi, il faut choisir $a = \dfrac{2}{\ln\frac{4}{3}}$.

2. $f_Y$ est égale à $\frac{1}{2}$ sur $[-1,1]$, et nulle ailleurs. On forme le produit de convolution de $f_X$ et $f_Y$ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_X \star f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\ \mathrm{d}t.$$

La fonction $f_X$ est nulle sur $\complement_{\mathbb{R}}[0,+\infty[$, et la fonction $t \mapsto f_Y(x-t)$ est nulle sur $\complement_{\mathbb{R}}[x-1,x+1]$. Donc $t \mapsto f_X(t)f_Y(x-t)$ est nulle sur $\complement_{\mathbb{R}}([0,+\infty[\cap[x-1,x+1]$.

- Si $x+1<0$, donc si $x<-1$, alors $t \mapsto f_X(t)f_Y(x-t)$ est nulle sur $\mathbb{R}$ et $f_X \star f_Y(x) = 0$.
- Si $x-1<0\leqslant x+1$, donc si $x\in[-1,1[$, alors $[0,+\infty[\cap[x-1,x+1]=[0,x+1]$, et par conséquent :

$$\begin{aligned}
f_X \star f_Y(x) &= \int_0^{x+1} \frac{a}{2(t+1)(t+2)(t+3)}\ \mathrm{d}t = \frac{a}{4}\left[\ln\frac{(t+1)(t+3)}{(t+2)^2}\right]_0^{x+1} \\
&= \frac{a}{4}\left(\ln\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2} - \ln\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\ln\frac{4}{3}}\ln\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}.
\end{aligned}$$

- Si $0\leqslant x-1$, donc si $x\geqslant 1$, alors $[0,+\infty[\cap[x-1,x+1]=[x-1,x+1]$, et par conséquent :

$$\begin{aligned}
f_X \star f_Y(x) &= \int_{x-1}^{x+1} \frac{a}{2(t+1)(t+2)(t+3)}\ \mathrm{d}t = \frac{a}{4}\left[\ln\frac{(t+1)(t+3)}{(t+2)^2}\right]_{x-1}^{x+1} \\
&= \frac{a}{4}\left(\ln\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2} - \ln\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right) = \frac{1}{2\ln\frac{4}{3}}\ln\frac{(x+4)(x+1)^2}{x(x+3)^2}.
\end{aligned}$$

Cette fonction est continue presque partout, et $X$ et $Y$ sont indépendantes, donc il s'agit d'une densité de $X+Y$.

**Correction de l'exercice 11 – (Loi de Rayleigh)**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 0 \\ x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$ en fait) et positive. De plus, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x$ est impropre en $+\infty$ seulement, car $x\mapsto x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Par ailleurs, une primitive de $x\mapsto x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est $-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, qui admet une limite finie (nulle) en $+\infty$. Ainsi, l'intégrale est convergente, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\lim_{+\infty}} = 1-0 = 1.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité}}$.

2. On a, pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$ :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x f(x)\ \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}}$$

3. • Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$, d'après les croissances comparées. Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$ est de même nature que $-\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$. Or, un changement de variables $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$ (affine donc valide) nous ramène à une intégrale de Gauss, donc convergente. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$ converge (la convergence absolue n'est pas à vérifier pour l'existence de l'espérance par la définition), donc $E(X)$ existe, et

$$\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^{\lim_{+\infty}} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\sqrt{2}\ \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{2},$$

d'où $\boxed{E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

• On effectue de même une intégration par partie avec $u : x \mapsto x^2$. On obtient de même que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$, et cette intégrale est convergente, de valeur 2, d'après la question 1. Ainsi $X$ admet un moment d'ordre 2, et :

$$E(X^2) = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^{\lim_{+\infty}} + 2\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 2.$$

Ainsi, d'après la formule de König-Huygens, $\boxed{V(X) = 4 - \frac{\pi}{2}.}$

4. Comme $X$ est à valeurs positives, la fonction $\varphi : x \mapsto x^2$ est positive, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, de dérivée strictement positive presque partout (sur $\mathbb{R}^*$). Alors, d'après le premier théorème de transfert, $Y = X^2$ est une variable à densité, et une densité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_Y(x) = \begin{cases} (\varphi^{-1})'(x) f_X(\varphi^{-1}(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate donc que $Y \mapsto \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Correction de l'exercice 13** – Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \lambda 2^{-x}$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = \mu 2^x$ si $x < 0$, où $\lambda$ et $\mu$ sont deux réels.

1. • La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc presque partout
   • La fonction $f$ est positive sur $\mathbb{R}$, à condition que $\lambda$ et $\mu$ soient positifs.
   • Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mu 2^x\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mu \mathrm{e}^{x\ln 2}\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda 2^{-x}\ \mathrm{d}x$ sont convergentes, en tant qu'intégrales exponentielles, et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x &= \mu\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x\ln 2}\ \mathrm{d}x + \lambda\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\ln 2}\ \mathrm{d}x \\ &= \mu\Big[\frac{1}{\ln 2}\mathrm{e}^{x\ln 2}\Big]_{-\infty}^{0} + \lambda\Big[-\frac{1}{\ln 2}\mathrm{e}^{-x\ln 2}\Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\mu}{\ln 2} + \frac{\lambda}{\ln 2} = \frac{\lambda+\mu}{\ln 2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } \lambda \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0 \text{ et } \lambda + \mu = \ln 2.}$

2. On effectue sur l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t\ln 2}\ \mathrm{d}t$ le changement de variable linéaire (donc valide) $u = t\ln 2$. Cette intégrale est donc de même nature (et le cas échéant de même valeur) que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{\ln 2}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\ln 2}$ Cette intégrale est convergente en tant qu'intégrale $\Gamma(2)$, et

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t\ln 2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{(\ln 2)^2}\Gamma(2) = \frac{1!}{(\ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2}.$$

De même, en effectuant le changement de variable $u = -t\ln 2$ (amenant la convergence de la même façon), on trouve :

$$\int_{-\infty}^0 t\mathrm{e}^{t\ln 2}\ \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{u}{\ln 2}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\ln 2} = -\frac{1}{(\ln 2)^2}.$$

Par conséquent, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ \mathrm{d}t$ converge, donc $X$ admet une espérance, et

$$E(X) = \mu\int_{-\infty}^0 t\mathrm{e}^{t\ln 2}\ \mathrm{d}t + \lambda\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t\ln 2}\ \mathrm{d}t = -\frac{\mu}{(\ln 2)^2} + \frac{\lambda}{(\ln 2)^2}.$$

Ainsi, $X$ est une variable centrée si et seulement si $\lambda - \mu = 0$, donc si $\lambda = \mu$. Comme on a de plus $\lambda + \mu = \ln 2$,

$\boxed{X \text{ est une variable centrée si et seulement si } \lambda = \mu = \dfrac{\ln 2}{2}}$

3. De même que pour $E(X)$, avec les mêmes changements de variable, assurant l'existence de $V(X)$ en se ramenant à une intégrale $\Gamma(3)$ :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{\ln 2}{2}\int_{-\infty}^0 t^2\mathrm{e}^{t\ln 2}\ \mathrm{d}t + \frac{\ln 2}{2}\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t\ln 2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{\ln 2}{2}\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(\ln 2)^2}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(\ln 2)^2}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\ln 2} \\
&= \frac{\Gamma(3)}{(\ln 2)^2} = \frac{2!}{(\ln 2)^2} = \frac{2}{(\ln 2)^2}
\end{aligned}$$

Comme $E(X) = 0$, $\boxed{V(X) = E(X^2) = \dfrac{2}{(\ln 2)^2}}$.

4. On détermine la fonction de répartition en intégrant la densité, ou bien en primitivant par morceaux, et en recollant les morceaux par le choix convenable des constantes d'intégration pour obtenir les limites en $+\infty$ et $-\infty$, et la continuité. On obtient alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \boxed{F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x\ln 2} = 2^{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x\ln 2} = 1 - 2^{-x-1} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}}$$

On remarque que les deux expressions sont valables pour $k = 0$.

5. Tout d'abord, $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$. Soit alors $k \in \mathbb{Z}$. On a

$$P(Y = k) = P(k \leqslant X < k+1) = F(k+1) - F(k).$$

On distingue deux cas :
- Si $k < 0$, $P(Y = k) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$
- Si $k \geqslant 0$, $P(Y = k) = 1 - 2^{-k-1-1} - 1 + 2^{-k-1} = 2^{-k-2}$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{P(Y = k) = \begin{cases} 2^{k-1} & \text{si } k < 0 \\ \frac{1}{2^{k+2}} & \text{si } k \geqslant 0 \end{cases}}$

L'espérance de $Y$ existe si les deux sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+2}}$ et $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{k}{2^{-k+1}}$ convergent absolument. La première somme est (absolument) convergente en tant que série géométrique dérivée, et la seconde devient, après réindexation, $-\sum_{k=1} +\infty \frac{k}{2^{k+1}}$. On retrouve encore une fois une série géométrique dérivée de paramètre $\frac{1}{2}$, donc absolument convergente. Ainsi, $Y$ admet une espérance, et

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+2}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+2}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Ainsi, on obtient une somme géométrique, d'où, après calcul : $\boxed{E(Y = -\frac{1}{2})}$

Normal : $X$ a une répartition symétrique, mais la partie entière déséquilibre un peu vers la gauche, le déséquilibre moyen étant donné par la moitié d'un intervalle $[n, n+1]$.

**Correction de l'exercice 16** – Soit $X$, $Y$ et $Z$ des variables à densité mutuellement indépendantes, suivant des lois uniformes sur $]0,1]$.

1. $X$ et $Y$ sont indépendantes. Calculons le produit de convolution de $f_X$ et $f_Y$, qui sont constantes sur $]0,1]$, de valeur 1, et nulles ailleurs. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X \star f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f_Y(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} f_Y(u)\ \mathrm{d}u,$$

par un changement de variables affine $u = x - t$. Ainsi :
- Si $x \leqslant 0$, $f_X \star f_Y(x) = \int_{x-1}^{x} 0\ \mathrm{d}t = 0$
- Si $0 < x \leqslant 1$, $f_X \star f_Y(x) = \int_0^x 1\ \mathrm{d}t = x$
- Si $1 < x \leqslant 2$, $f_X \star f_Y(x) = \int_{x-1}^{1} 1\ \mathrm{d}t = 2 - x$
- Si $x > 2$, $f_X \star f_Y(x) = 0$.

Cette fonction est continue presque partout, et $X$ et $Y$ sont indépendantes, donc $f_X \star f_Y$ est une densité de $X + Y$, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Formons de même le produit de convolution de $f_{X+Y}$ et $f_Z$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z \star f_{X+Y}(x) = \int_0^1 f_Z(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} f_Z(u)\ \mathrm{d}u.$$

Ainsi :
- Si $x \leqslant 0$, $f_Z \star f_{X+Y}(x) = 0$.
- Si $0 < x \leqslant 1$, $f_Z \star f_{X+Y}(x) = \int_0^x u\ \mathrm{d}u = \frac{x^2}{2}$.
- Si $1 < x \leqslant 2$,

$$f_Z \star f_{X+Y}(x) = \int_{x-1}^{1} u\ \mathrm{d}u + \int_1^x 2 - u\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(2-x)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 - x^2 + 3x - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} - x^2 + 3x.$$

- Si $2 < x \leqslant 3$, $f_Z \star f_{X+Y}(x) = \int_{x-1}^{2} 2 - u\ \mathrm{d}u = \frac{(3-x)^2}{2}$
- Si $x > 3$, $f_Z \star f_{X+Y}(x) = 0$.

Cette fonction est continue presque partout, et $X + Y$ et $Z$ sont indépendantes. Ainsi, il s'agit d'une densité de $X + Y + Z$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y+Z}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 32 - x^2 + 3x & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{(3-x)^2}{2} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

2. La variable $X$ prend ses valeurs sur $[0,1]$. Or, ln n'est pas définie en 0. Mais $P(X=0)=0$, donc $\ln(X)$ est définie sur une partie presque certaine de $\Omega$, il s'agit donc d'une variable aléatoire.
Trouvons sa fonction de répartition. Puisque $X$ prend ses valeurs dans $[0,1]$, $\ln(X)$ prend ses valeurs dans $]-\infty,0]$. Ainsi, si $x \geqslant 0$,
$$F_{\ln X}(x) = P(\ln X \leqslant x) = 1.$$
Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a alors :
$$F_{\ln X}(x) = P(\ln X \leqslant x) = P(X \leqslant \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x,$$
puisque l'exponentielle est positive, et puisque $\mathrm{e}^x \in [0,1]$.
On vérifie facilement que $F_{\ln X}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, $\ln X$ est une variable aléatoire à densité, et une densité en est :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln X}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. On calcule le produit de convolution de $f_{\ln X}$ et $f_{\ln Y}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors
$$f_{\ln X} \star f_{\ln Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln X}(t) f_{\ln Y}(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t f_{\ln Y}(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} \mathrm{e}^{x-u} f_{\ln Y}(u)\ \mathrm{d}u.$$
Ainsi :
- Si $x \leqslant 0$,
$$f_{\ln X} \star f_{\ln Y}(x) = \int_x^0 \mathrm{e}^{x-u}\mathrm{e}^u\ \mathrm{d}u = -x\mathrm{e}^x,$$
- Si $x > 0$,
$$f_{\ln X} \star f_{\ln Y}(x) = 0.$$

Cette fonction est continue presque partout, et $\ln X$ et $\ln Y$ sont indépendantes. Ainsi, il s'agit d'une densité de $\ln X + \ln Y$ :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln X + \ln Y}(x) = \begin{cases} -x\mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
On calcule le produit de convolution de $f_{\ln X+\ln Y}$ et de $f_{\ln Z}$.
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln Z} \star f_{\ln X+\ln Y}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln Z}(t) f_{\ln X+\ln Y}(x-t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t f_{\ln X+\ln Y}(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{x-u} f_{\ln X+\ln Y}(u)\ \mathrm{d}u. \end{aligned}$$
Ainsi :
- Si $x \leqslant 0$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln Z} \star f_{\ln X+\ln Y}(x) = -\int_x^0 \mathrm{e}^{x-u} u \mathrm{e}^u\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x,$$
- Si $x > 0$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln Z} \star f_{\ln X+\ln Y}(x) = 0.$$

La fonction obtenue est continue presque partout, et $\ln Z$ et $\ln X + \ln Y$ sont indépendantes. Ainsi, il s'agit d'une densité de $\ln X + \ln Y + \ln Z$ :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln X+\ln Y+\ln Z} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Tout d'abord, $X$, $Y$ et $Z$ prennent leurs valeurs dans $[0,1]$, donc leur produit aussi. Ainsi, pour tout $x \leqslant 0$, $F_{XYZ}(x) = 0$, et pour tout $x \leqslant 1$, $F_{XYZ}(x) = 1$.
Soit $x \in ]0,1[$. On a $XYZ = \mathrm{e}^{\ln(XYZ)} = \mathrm{e}^{\ln X + \ln Y + \ln Z}$. Ainsi, on obtient la fonction de répartition de $XYZ$ :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(XYZ \leqslant x) = P(\mathrm{e}^{\ln(XYZ)} \leqslant x) = P(\ln X + \ln Y + \ln Y \leqslant \ln x) = F_{\ln X+\ln Y+\ln Y}(\ln x)$$
Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, et également en 0 et en 1 d'après la continuité de $F_{\ln X+\ln Y+\ln Y}$. De plus, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Ainsi, $XYZ$ est une variable aléatoire à densité et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{XYZ}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} f_{\ln X+\ln Y+\ln Z}(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

**Correction de l'exercice 17 –**

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ est convergente, car $f$ est une fonction contoinue par morceaux, à support borné $[0, 2]$. On a alors :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 a\ \mathrm{d}x + \int_1^2 3a\ \mathrm{d}x = 4a.$$
Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$ si et seulement si $a = \frac{1}{4}$. Pour cette valeur de $a$, $f$ est positive sur $\mathbb{R}$, et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, donc presque partout. Ainsi, $f$ est bien une densité de probabilité.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } a = \frac{1}{4}}$.
2. La densité $f$ de $X$ étant à support borné, $X$ admet une espérance et une variance, et :
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{4}\ \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{3x}{4}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{8} + \frac{9}{8} = \boxed{\frac{5}{4} = E(X)}.$$
Le moment d'ordre 2 de $X$ est :
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{4}\ \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{3x^2}{4}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{12} + \frac{7}{4} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}.$$
Ainsi, d'après la formule de König-Huygens,
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{11}{6} - \frac{25}{16} = \frac{88 - 75}{48} = \boxed{\frac{13}{48} = V(X)}.$$
3. Puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes, une densité de $X + Y$ est $f_X \star f_Y$, à condition que ce produit de convolution soit continu presque partout.
Or, soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f \star f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)f(x-t)\ \mathrm{d}t.$$
La fonction $t \mapsto f(t)f(x-t)$ est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [0, 2] \cap [x-2, x]$. On obtient la discussion suivante :
   - Si $x < 0$, ou si $x - 2 > 2$ (donc $x > 4$), $[0, 2] \cap [x-2, x] = \varnothing$, donc $f \star f(x) = 0$ ;
   - Si $x \in [0, 1]$, $[x-2, x] \cap [0, 2] = [0, x]$, et si $t \in [0, x]$, $x - t \in [0, x] \subset [0, 1]$, donc
   $$f(t)f(x-t) = a^2.$$
   Ainsi,
   $$f \star f(x) = \int_0^x a^2\ \mathrm{d}t = a^2 x = \frac{x}{16}.$$
   - si $x \in [1, 2]$, alors $[x-2, x] \cap [0, 2] = [0, x]$, et :
   $$\forall t \in [0, x],\quad f(t)f(x-t) = \begin{cases} 3a^2 & \text{si } t \in [0, x-1] \\ a^2 & \text{si } t \in [x-1, 1] \\ 3a^2 & \text{si } t \in [1, x]. \end{cases}$$
   Ainsi,
   $$f \star f(x) = \int_0^{x-1} 3a^2\ \mathrm{d}t + \int_{x-1}^1 a^2\ \mathrm{d}t + \int_1^x 3a^2\ \mathrm{d}t = 3a^2(x-1+x-1) + a^2(2-x) = a^2(5x-4) = \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}.$$
   - Si $x \in [2, 3]$, alors $[x-2, x] \cap [0, 2] = [x-2, 2]$, et
   $$\forall t \in [x-2, 2],\quad f(t)f(x-t) = \begin{cases} 3a^2 & \text{si } t \in [x-2, 1] \\ 9a^2 & \text{si } t \in [1, x-1] \\ 3a^2 & \text{si } t \in [x-1, 2]. \end{cases}$$
   Ainsi,
   $$f \star f(x) = \int_{x-2}^1 3a^2\ \mathrm{d}t + \int_1^{x-1} 9a^2\ \mathrm{d}t + \int_{x-1}^2 3a^2\ \mathrm{d}t = 3a^2(3-x+3-x) + 9a^2(x-2) = 3a^2 x = \frac{3x}{16}.$$

- Si $x \in [3,4]$, alors $[x-2,x] \cap [0,2] = [x-2,2]$, et

$$\forall t \in [x-2,2], \quad f(t)f(x-t) = 9a^2,$$

donc

$$f \star f(x) = \int_{x-2}^{2} 9a^2 \ \mathrm{d}t = 9(4-x)a^2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{16}x.$$

Cette fonction étant continue presque partout (elle est même continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit ($X$ et $Y$ étant indépendantes), qu'une densité de $X+Y$ est :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{16} & \text{si } x \in [0,1[ \\ \dfrac{5}{16}x - \dfrac{1}{4} & \text{si } x \in [1,2[, \\ \dfrac{3x}{16} & \text{si } x \in [2,3[, \\ \dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{16}x & \text{si } x \in [3,4[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

4. D'après le second théorème de transfert, la variable aléatoire $Z$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^x - 2)^2 f(x) \ \mathrm{d}x$ converge absolument. Or, $f$ étant nulle sauf sur $[0,2]$, cette intégrale vaut $\displaystyle\int_0^2 (\mathrm{e}^x - 2)^2 f(x) \ \mathrm{d}x$. Comme la fonction $\mapsto (\mathrm{e}^x-2)^2 f(x)$ est continue par morceaux sur $[0,2]$, on en déduit que l'intégrale est définie, donc convergente. Ainsi, $Z$ admet une espérance, et

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{1}{4}\int_0^1 (\mathrm{e}^x-2)^2 \ \mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_1^2 (\mathrm{e}^x-2)^2 \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 (\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 4) \ \mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_1^2 (\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 4) \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1) - 4(\mathrm{e}-1) + 4\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2) - 4(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}) + 4\right) \\ &= \boxed{\frac{39}{8} + 2\mathrm{e} - \frac{13}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{3}{8}\mathrm{e}^4 = E(Z)}. \end{aligned}$$

5. $X$ est à valeurs dans $[0,2]$, donc $\mathrm{e}^X - 2$ est à valeurs dans $[-1, \mathrm{e}^2-2]$, donc $(\mathrm{e}^X-2)^2$ est à valeurs dans $[0, (\mathrm{e}^2-2)^2]$, puisque $\mathrm{e}^2 - 2 > 1$.
Soit $x \in [0, (\mathrm{e}^2-2)^2]$. On a :

$$P(Z \leqslant x) = P((\mathrm{e}^X-2)^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant \mathrm{e}^X - 2 \leqslant \sqrt{x}) = P(2-\sqrt{x} \leqslant \mathrm{e}^X \leqslant 2+\sqrt{x})$$

- Si $2 - \sqrt{x} \leqslant 0$, donc si $x \geqslant 4$, alors l'événement $[2-\sqrt{x} \leqslant \mathrm{e}^X]$ est l'événement certain, donc

$$P(Z \leqslant x) = P(\mathrm{e}^X \leqslant 2+\sqrt{x}) = P(X \leqslant \ln(2+\sqrt{x})) = F_X(\ln(2+\sqrt{x})).$$

- Si $0 \leqslant x < 4$, alors

$$P(Z \leqslant x) = P(\ln(2-\sqrt{x}) \leqslant X \leqslant \ln(2+\sqrt{x})) = P(\ln(2-\sqrt{x}) < X \leqslant \ln(2+\sqrt{x})),$$

car $X$ est une variable à densité (donc les probabilités ponctuelles sont nulles). Ainsi

$$P(Z \leqslant x) = F_X(\ln(2+\sqrt{x})) - F_X(\ln(2-\sqrt{x})).$$

On a donc :

$$\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(\ln(2+\sqrt{x})) - F_X(\ln(2-\sqrt{x})) & \text{si } x \in [0,4[ \\ F_X(\ln(2+\sqrt{x})) & \text{si } x \in [4, (\mathrm{e}^2-2)^3] \\ 1 & \text{si } x > (\mathrm{e}^2-2)^3. \end{cases}}$$

Or, $Z$ étant l'image par une fonction continue d'une variable aléatoire, $Z$ est une variable aléatoire. Donc $F_Z$ est bien une fonction de répartition. De plus :

- $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}$, donc $F_Z$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout $x$ tel que $x \neq 0$, $x \neq 4$, $x \neq (\mathrm{e}^2-2)^2$, $\ln(2+\sqrt{x}) \neq 0,1,2$, $\ln(2-\sqrt{x}) \neq 0,1,2$. Puisque les fonctions $x \mapsto \ln(2+\sqrt{x})$ et $x \mapsto \ln(2-\sqrt{x})$ sont strictement monotones (donc injectives), il y a au plus 9 valeurs de $x$ en lesquelles $F_Z$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. Donc $F_Z$ est de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout.
- La fonction $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$, et les fonctions $x \mapsto \ln(2+\sqrt{x})$ et $x \mapsto \ln(2-\sqrt{x})$ sont continues respectivement sur $[0,(\mathrm{e}^2-2)^2]$ et sur $[0,4[$. Ainsi, d'après les règles de composition, $F_Z$ coïncide sur les ouverts $]-\infty,0[$, $]0,4[$, $]4,(\mathrm{e}^2-2)^2[$ et $](\mathrm{e}^2-2)^2,+\infty[$ avec des fonctions continue, et elle est donc continue sur ces intervalles. De plus, puisque $F_X$ est continue :
  * $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Z(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} = F_X(\ln 2) - F_X(\ln 2) = 0$. Ainsi, on a :
  $$\lim_{x\to 0^-} F_Z(x) = F_Z(0) = \lim_{x\to 0^+} F_Z(x),$$
  donc $F_Z$ est continue en 0.
  * $\lim\limits_{x\to 4^-} F_Z(x) = F_X(4) - \lim\limits_{y\to -\infty} F_X(y) = F_X(4) = \lim\limits_{x\to 4^+} F_Z(x)$
  (la dernière égalité ne demandant en fait pas de vérification, puisque $F_Z$ est continue à droite, en tant que fonction de répartition)
  Ainsi $F_Z$ est continue en 4
  * $\lim\limits_{x\to((\mathrm{e}^2-2)^2)^-} F_Z(x) = F_X(\ln(2+\mathrm{e}^2-2)) = F_X(2) = 1 = F_Z((\mathrm{e}^2-2)^2)$,
  et de même, par continuité à droite de $F_Z$, cela implique la continuité de $F_Z$ en $(\mathrm{e}^2-2)^2$.

  Ainsi, $F_Z$ est continue.

On en déduit que $Z$ est une variable aléatoire à densité, et, en dérivant $F_Z$ presque partout, il vient :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \text{ ou si } x>(\mathrm{e}^2-2)^2,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} f_X(\ln(2+\sqrt{x})) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}(2-\sqrt{x})} f_X(2-\sqrt{x}) & \text{si } x\in[0,4[\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} f_X(\ln(2+\sqrt{x})) & \text{si } x\in[4,(\mathrm{e}^2-2)^2]. \end{cases}}$$

Or :

- $\ln(2+\sqrt{x}) \in [0,1[$ si et seulement si $1 \leqslant 2+\sqrt{x} < \mathrm{e}$, donc si et seulement si $0 \leqslant x < (\mathrm{e}-2)^2 < 4$,
- $\ln(2+\sqrt{x}) \in [1,2[$ si et seulement si $\mathrm{e} \leqslant 2+\sqrt{x} < \mathrm{e}$, donc $(\mathrm{e}-2)^2 \leqslant x < (\mathrm{e}^2-2)^2$
- $\ln(2-\sqrt{x}) \in [0,1[$ si et seulement si $1 < 2-\sqrt{x} < \mathrm{e}$, donc si et seulement si $0 \leqslant x < 1$ (la deuxième condition étant automatiquement satisfaite pour tout $x \geqslant 0$)
- $\ln(2-\sqrt{x}) \in [1,2[$ si et seulement si $\mathrm{e} < 2-\sqrt{x} < \mathrm{e}^2$, ce qui est impossible.

On obtient donc :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \text{ ou si } x>4,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} + \dfrac{1}{8\sqrt{x}(2-\sqrt{x})} & \text{si } x\in[0,(\mathrm{e}-2)^2[\\ \dfrac{3}{8\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} + \dfrac{1}{8\sqrt{x}(2-\sqrt{x})} & \text{si } x\in[(\mathrm{e}-2)^2,1[\\ \dfrac{3}{8\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} & \text{si } x\in[1,(\mathrm{e}^2-2)^2]. \end{cases}}$$

**Correction de l'exercice 19 –**

1. Déterminons dans un premier temps le nombre de valeurs propres de $A$. Le réel $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $A-\lambda I_2$ est non inversible, donc si et seulement si $\det(A-\lambda I_2)=0$. Or :
$$\det(A-\lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1\\ y & 2x-\lambda\end{pmatrix} = -\lambda(2x-\lambda)+y = \lambda^2-2\lambda x+y.$$
On a $\Delta = 4x^2-4y$. Ainsi :
   - si $x^2-y>0$, $A$ possède deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$, donc, $A$ étant de type $2\times 2$, $A$ est diagonalisable ;
   - si $x^2-y=0$, $A$ possède une unique valeur propre dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si $A$ était diagonalisable, $A$ serait égal à une homothétie $\lambda I_2$, ce qui n'est pas le cas, puisque son coefficient en position $(1,2)$ est égal à $-1$, donc non nul. Donc $A$ n'est pas diagonalisable ;
   - si $x^2-y=0$, $A$ n'admet pas de valeur propre réelle ($\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\varnothing$). Ainsi, $A$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $x^2 - y > 0$.

2. *Dans la suite, $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$. On note $F_X$ (respectivement $F_Y$) la fonction de répartition de $X$ (respectivement $Y$).*

   (a) La variable $X$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$, donc une densité de $X$ est la fonction :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   La fonction de répartition de $X$ est alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

   La variable aléatoire $X^2$ est à valeurs dans $[0,1]$, donc :

$$\forall x < 0, \ F_{X^2}(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \geqslant 1, \ F_{X^2}(x) = 1.$$

   Soit maintenant $x \in [0,1[$. Alors :

$$F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = \sqrt{x}.$$

   Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

   Comme $X^2$ est une variable aléatoire, $F_{X^2}$ est une fonction de répartition. Pour que $X^2$ soit une variable à densité, il suffit donc de vérifier que $F_{X^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout.
   Or, $F_{X^2}$ coïncide sur les ouverts $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, et continue, sauf éventuellement en 0 et en 1. Mais :

$$\lim_{x \to 0^-} F_{X^2}(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} F_{X^2}(x), \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1^-} F_{X^2}(x) = 1 = \lim_{x \to 1^+} F_{X^2}(x),$$

   Ainsi, $F_{X^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   Par conséquent, $F_{X^2}$ est bien la fonction de répartition d'une variable à densité, donc $X^2$ est une variable à densité, et une densité est obtenue en dérivant $F_{X^2}$ presque partout, par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in ]0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (b) On a $F_Y = F_X$, et $-Y$ prend ses valeurs dans $[-1,0]$. Ainsi,

$$\forall x < -1, \quad F_{-Y}(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \geqslant 0, \quad F_{-Y}(x) = 1.$$

   De plus, étant donné $x \in [-1,0]$,

$$F_{-Y}(x) = P(-Y \leqslant x) = P(Y \geqslant -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - P(Y \leqslant -x) = 1 + x,$$

   l'avant dernière égalité découlant du fait que pour une variable à densité, les probabilités ponctuelles sont nulles. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{-Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

   Comme précédemment, on vérifie facilement que $F_{-Y}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$, donc $-Y$ est une variable aléatoire à densité. On obtient une densité par dérivation presque partout, par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{-Y}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) Calculons le produit de convolution de $f_{X^2}$ et de $f_{-Y}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X^2} \star f_{-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t) \text{ d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_{X^2}$ est nulle sur $\complement_{\mathbb{R}}[0,1]$, et la fonction $t \mapsto f_{-Y}(x-t)$ est nulle sur $\complement_{\mathbb{R}}[x, x+1]$, ainsi, la fonction $g : t \mapsto f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t)$ est nulle sur $\complement_{\mathbb{R}}[0,1] \cap [x, x+1]$.

- Si $x+1 < 0$, donc si $x < -1$, alors $[0,1] \cap [x, x+1] = \varnothing$, et $g$ est nulle sur $\mathbb{R}$, donc son intégrale converge, et $f_{X^2} \star f_{-Y}(x) = 0$.
- Si $x < 0 \leqslant x+1 < 1$, donc si $x \in [-1, 0[$, alors $[0,1] \cap [x, x+1] = [0, x+1]$, et

$$f_{X^2} \star f_{-Y}(x) = \int_0^{x+1} f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t) \text{ d}t = \int_0^{x+1} \frac{\text{d}t}{2\sqrt{t}} \text{ d}t.$$

Cette intégrale est bien convergente (intégrale de Riemann en 0, de paramètre $\frac{1}{2}$), et :

$$f_{X^2} \star f_{-Y}(x) = \left[\sqrt{t}\right]_{\lim_0}^{x+1} = \sqrt{x+1}.$$

- Si $0 \leqslant x < 1 \leqslant x+1$, donc si $x \in [0, 1[$, alors $[0,1] \cap [x, x+1] = [x, 1]$, et

$$f_{X^2} \star f_{-Y}(x) = \int_x^1 f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t) \text{ d}t = \int_x^1 \frac{\text{d}t}{2\sqrt{t}} \text{ d}t.$$

Cette intégrale est bien convergente (si $x \neq 0$, l'intégrale n'est pas impropre, et si $x = 0$, c'est une intégrale de Riemann en 0, de paramètre $\frac{1}{2}$), et :

$$f_{X^2} \star f_{-Y}(x) = \left[\sqrt{t}\right]_x^1 = 1 - \sqrt{x}.$$

- Si $1 < x$, alors $[0,1] \cap [x, x+1] = \varnothing$, et $f_{X^2} \star f_{-Y}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \text{ d}t = 0$.

Ainsi, le produit de convolution de $f_{X^2}$ et $f_{-Y}$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X^2} \star f_{-Y}(x) = h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme ce produit de convolution est continu presque partout (défaut éventuel de continuité uniquement en $-1$, 0 et 1), et comme $X$ et $Y$ sont indépendantes (et donc aussi $X^2$ et $-Y$), on en déduit que $X^2 - Y$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée par $f_{X^2} \star f_{-Y} = h$.

(d) D'après la question 1, la probabilité $p$ que la matrice $M$ soit diagonalisable est :

$$p = P(X^2 - Y > 0) = \int_0^{+\infty} f_{X^2 - Y}(t) \text{ d}t = \int_0^1 1 - \sqrt{x} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

**Correction de l'exercice 20** – (Questions indépendantes)

1. Soit $F_Y$ la fonction de répartition de $Y$ et $F_{-Y}$ la fonction de répartition de $-Y$. Pour commencer, le premier théorème de transfert assure que $-Y$ est une variable aléatoire, puisque $x \mapsto -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante, de dérivée ne s'annulant pas. Ainsi, on peut directement déterminer une densité de $-Y$ en dérivant sa fonction de répartition presque partout, sans autre justification à donner :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{-Y}(x) = P(-Y \leqslant x) = P(Y \geqslant -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - P(Y \leqslant -x),$$

car $Y$ est une variable à densité. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{-Y}(x) = 1 - F_Y(-x) = \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } -x < 0 \\ 1 - (-x) & \text{si } 0 \leqslant -x \leqslant 1 \\ 1 - 1 & \text{si } -x > 1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{-Y}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Donc une densité de $-Y$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{-Y}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $-Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,0])$. Lorsque nous aurons étudié les propriétés des lois uniformes, nous serons en mesure d'affirmer cela directement.
À condition que le produit de convolution soit continu presque partout, une densité de $X-Y$ est alors donné par le produit de convolution $f_X \star f_{-Y}$, **puisque $X$ et $Y$ (donc $X$ et $-Y$) sont indépendants**.
Calculons ce produit de convolution : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_X \star f_{-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\ \mathrm{d}t.$$

Or, pour une valeur de $x$ fixée, $f_{-Y}(x-t)$ est non nulle (égale à 1) si et seulement si $x-t \in [-1,0]$, donc $t-x \in [0,1]$, donc $t \in [x, x+1]$. Ainsi :

$$f_X \star f_{-Y}(x) = \int_x^{x+1} f_X(t) = \frac{1}{\pi}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{\pi}(\operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan} x).$$

Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, et $X$ et $-Y$ étant indépendante (je préfère le rappeler, même si je l'ai mentionné plus haut déjà), une densité de $f_{X-Y}$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_{X-Y}(x) = \frac{1}{\pi}(\operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x))}.$$

2. Remarquons d'abord que $\ln X$ et $\ln Y$ sont définies pour presque tout $\omega$ de $\Omega$ (la valeur $X=0$ et $Y=0$ étant quasi-impossible). Donc $\ln X$ et $\ln Y$ sont des variables aléatoires. De plus, ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée ne s'annulant pas, d'après le premier théorème de transfert, $\ln X$ et $\ln Y$ sont des variables aléatoires à densité. Enfin, on remarque que $\ln X$ et $\ln Y$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_-$, donc une densité de $\ln X$ et de $\ln Y$ sera nulle sur $\mathbb{R}_+$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad F_{\ln X}(x) = P(\ln X \leqslant x) = P(X \leqslant \mathrm{e}^x) = F_X(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x,$$

puisque $\mathrm{e}^x \in [0,1]$. Ainsi, on obtient $f_{\ln X}$ (égal à $f_{\ln Y}$), en déruvant presque partout :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln X}(x) = f_{\ln Y}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons $f$ cette fonction.
Puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes, il en est de même de $\ln X$ et $\ln Y$. Ainsi, une densité de $\ln X + \ln Y$ sera donnée par $f \star f$, à condition que ce produit soit continu presque partout.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f \star f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t f(x-t)\ \mathrm{d}t.$$

Or, $x - t \leqslant 0$ si et seulement si $t \geqslant x$. Ainsi :
- si $x \leqslant 0$, alors

$$f \star f(x) = \int_x^0 \mathrm{e}^t f(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_x^0 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{x-t}\ \mathrm{d}t = \int_x^0 \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^x;$$

- si $x > 0$, alors $f \star f(x) = 0$.

Ainsi, cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$), et les variables $\ln X$ et $\ln Y$ étant indépendantes), il s'agit d'une densité de $\ln X + \ln Y = \ln(XY)$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln(XY)}(x) = \begin{cases} -x\mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer l'exponentielle : celle-ci étant strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée ne s'annulant pas, d'après le premier théorème de transfert, $XY$ est bien une variable aléatoire à densité. Elle prend ses valeurs dans $[0,1]$, et, pour tout $x \in ]0,1]$ :

$$F_{XY}(x) = P(XY \leqslant x) = P(\ln(XY) \leqslant \ln x) = F_{\ln(XY)}(\ln x),$$

et donc

$$f_{XY}(x) = \frac{1}{x} f_{\ln(XY)}(\ln x) = -\frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot x = -\ln x.$$

On obtient donc au final une densité de $XY$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_{XY}(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_X(x) = f_Y(x) = f_Z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Notons $f$ cette fonction. Commençons par déterminer $f \star f$. À condition que cette fonction soit continue presque partout, il s'agira d'une densité de $X+Y$, puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f \star f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t) \text{ d}t.$$

Or,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t)f(x-t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \cap [x-1,x] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc la discussion suivante :
- Si $x < 0$, ou $x > 2$ alors $[0,1] \cap [x-1,x] = \varnothing$, et donc $f \star f(x) = 0$ ;
- Si $0 \leqslant x < 1$, alors $[0,1] \cap [x-1,x] = [0,x]$, et donc

$$f \star f(x) = \int_0^x 1 \text{ d}t = x;$$

- Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $[0,1] \cap [x-1,x] = [x-1,1]$, et donc

$$f \star f(x) = \int_{x-1}^1 1 \text{ d}t = 2-x.$$

La fonction obtenue est continue, sauf éventuellement en 0, 1 ou 2 (elle est en fait aussi continue en ces valeurs, mais c'est inutile de le savoir), donc, puisque $X$ et $Y$ sotn indépendantes, il s'agit d'une densité de $X+Y$ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou si } t > 2 \\ x & \text{si } t \in [0,1[ \\ 2-x & \text{si } t \in [1,2]. \end{cases}$$

Puisque $X+Y$ et $Z$ sont indépendantes, une densité de $X+Y+Z$ est $f_{X+Y} \star f_Z$, à condition que cette fonction soit continue presque partout. Déterminons donc $f_{X+Y} \star f_Z$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f_{X+Y} \star f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X+Y}(t) f_Z(x-t) \text{ d}t.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f_{X+Y}(t) f_Z(x-t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0,1[ \cap [x-1,x] \\ 2-t & \text{si } t \in [1,2] \cap [x-1,x] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela amène la discussion suivante :
- si $x < 0$ ou si $x > 3$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_{X+Y}(t) f_Z(x-t) = 0$, donc $f_{X+Y} \star f_Z(x) = 0$.
- Si $x \in [0,1[$, alors $[0,1[ \cap [x-1,x] = [0,x]$ et $[1,2] \cap [x-1,x] = \varnothing$, donc

$$f_{X+Y} \star f_Z(x) = \int_0^x t \text{ d}t = \frac{x^2}{2}.$$

- Si $x \in [1,2[$, alors $[0,1[\cap[x-1,x] = [x-1,1[$ et $[1,2]\cap[x-1,x] = [1,x]$, donc :

$$f_{X+Y} \star f_Z(x) = \int_{x-1}^{1} t\ \mathrm{d}t + \int_1^x (2-t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(2-x)^2}{2} + \frac{1}{2} = -x^2+3x-\frac{3}{2}.$$

- Si $x \in [2,3]$, alors $[0,1[\cap[x-1,x] = \varnothing$ et $[1,2]\cap[x-1,x] = [x-1,2]$, donc :

$$f_{X+Y} \star f_Z(x) = \int_{x-1}^{2} (2-t)\ \mathrm{d}t = \frac{(3-x)^2}{2}$$

La fonction obtenue est de manière évidente continue, sauf éventuellement en $0,1,2$ ou $3$. On peut vérifier qu'en fait elle est continue aussi en ces points. Comme $X+Y$ et $Z$ sont indépendantes, il en résulte qu'une densité de $X+Y+Z$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \boxed{f_{X+Y+Z}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in [0,1[ \\ -x^2+3x-\dfrac{3}{2} & \text{si } x \in [1,2[ \\ \dfrac{(3-x)^2}{2} & \text{si } x \in [2,3] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

**Correction de l'exercice 21 – (Oral ESCP)**

1. La variable à densité $Z$ est bornée, donc admet une espérance
On suppose de plus que pour tout $x \in ]0,1[,\quad g(1-x) = g(x)$. Alors, le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant, bijectif de $]0,1[$ dans $]0,1[$ donné par $t = 1-x$ fournit :

$$E(Z) = \int_0^1 xg(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^1 (1-t)g(1-t)(-\ \mathrm{d}t) = \int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 tg(t)\ \mathrm{d}t = 1 - E(X),$$

en utilisant la relation $g(1-t) = g(t)$, et en se souvenant que l'intégrale sur tout son domaine d'une densité est égale à 1. Ainsi,

$$2E(Z) = 1 \qquad \text{donc:} \qquad E(Z) = \frac{1}{2}.$$

***Attention*** *au fait que même si $Z$ est bornée, ce qui fournit automatiquement l'existence de $E(Z)$, l'intégrale qui définit $E(Z)$ peut être impropre (mais convergente) : il est donc nécessaire de vérifier les hypothèses du changement de variable pour les intégrales impropres.*

2. La fonction sin est strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et continue, donc, d'après le théorème de la bijection, sin réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image dont les bornes sont données par les images des bornes de l'intervalle source, donc sur l'intervalle $[-1,1]$.
Soit $\varphi$ la réciproque de sin, définie sur $[-1,1]$.
De plus, la dérivée de sin est cos, qui ne s'annule qu'aux points $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ sur l'intervalle considéré. Ainsi, $\varphi$ est dérivable sur $[-1,1]$, sauf aux points $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Ainsi, $\varphi$ est dérivable sur $]-1,1[$.
De plus :

$$\forall x \in ]-1,1[,\quad \varphi'(x) = \frac{1}{\cos(\varphi(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

puisque cos est positive sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
***Évidemment,***, *vous aurez reconnu l'Arcsin. Cette fonction n'étant pas au programme, il faut savoir refaire ce calcul.*

3. Soit $h : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, définie sur $]0,1[$. La fonction $h$ est continue sur $]0,1[$, donc les seuls impropretés de l'intégrales $I$ sont aux points 0 et 1. De plus,

$$h(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad h(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}.$$

Or, les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$ convergent en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $\frac{1}{2} < 1$ au voisinage d'une borne finie. Les intégrandes étant positives, le théorème de comparaison des intégrales par équivalence amène la convergence de l'intégrale $I$.

On a, pour tout $x \in ]0,1[$,

$$x(1-x) = x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1-(2x-1)^2\right).$$

Ainsi, en faisant le changement de variable $t = 2x-1$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, bijectif de $]0,1[$ sur $]-1,1[$, on obtient :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{2\ \mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \Big[\varphi(t)\Big]_{\lim_{-1}}^{\lim_1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

4. La fonction $f$ est positive, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, par recollement de fonctions continues sur des ouverts (elle est même continue sur $\mathbb{R}$, mais il est inutile de vérifier la continuité en 0 et 1), et d'après la question précédente,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{I}{\pi} = 1.$$
Ainsi, $f$ est une densité de probabilité.
5. (a) On a, de manière immédiate, pour tout $x \in ]0,1[$, $f(1-x) = f(x)$, donc $E(X) = \frac{1}{2}$ d'après la question 1.
   (b) On fait un calcul direct.
   Tout d'abord, $f$ étant à support borné, $E(X)$ existe.
   Faisons le changement de variables $x = \sin^2\theta$. La fonction sin est positive et strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, donc $\sin^2$ est strictement coissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, de classe $\mathcal{C}^1$, et bijective de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0,1[$. De plus, $\mathrm{d}x = 2\cos\theta \sin \times \theta\ \mathrm{d}\theta$
   Ainsi :
   $$E(X) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x\ \mathrm{d}t}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^3\theta\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\theta \cdot (1-\sin^2\theta)}},$$
   et, les fonctions cos et sin étant positives sur $]0, \frac{\pi}{2}[$,
   $$E(X) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2\theta))\ \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$