Probabilités 7 – Estimation

Correction de l'exercice 3 –

1. Soit, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: S_k suit une loi de Pascal de paramètres k et p.

   . Pour $k = 1$, l'expression de la loi de Pascal est exactement égale à l'expression de la loi géométrique de paramètre p. Or, dans ce cas, $S_k = T_1$, qui suit une loi géométrique de paramètre p. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vérifié.

   Soit $k \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vérifié. On a alors $S_{k+1} = S_k + T_{k+1}$.

   Par hypothèse de récurrence, S_k prend ses valeurs dans $[\![k, +\infty[\![$, et T_{k+1} prend ses valeurs dans $[\![1, +\infty[\![$, de façon indépendante. Donc $S_{k+1}(\Omega) = [\![k+1, +\infty[\![$.

   Soit $\ell \in [\![k+1, +\infty[\![$. On a alors :

$$P(S_{k+1} = \ell) = P\left(\bigcup_{i=k}^{\ell-1} [S_k = i] \cap [T_{k+1} = \ell - i]\right) = \sum_{i=k}^{\ell-1} P([S_k = i] \cap [T_{k+1} = \ell - i]),$$

   les événements de cette union étant deux à deux incompatibles. Par ailleurs, les variables S_k et T_{k+1} étant indépendantes, on obtient :

$$P(S_{k+1} = \ell) = \sum_{i=k}^{\ell-1} P(S_k = i)P(T_{k+1} = \ell - i) = \sum_{i=k}^{\ell-1} \binom{i-1}{k-1} p^k q^{i-k} \cdot pq^{\ell-i-1} = p^{k+1} q^{\ell-k-1} \sum_{j=k-1}^{\ell-2} \binom{j}{k-1},$$

   et, d'après la formule de sommation des coefficients binomiaux (se démontrant facilement combinatoirement ou par récurrence, à savoir faire),

$$P(S_{k+1} = \ell) = \binom{\ell-1}{k} p^{k+1} q^{\ell-(k+1)}.$$

   Ainsi, S_{k+1} suit bien une loi de Pascal de paramètres (k, p).

   Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ entraîne $\mathcal{P}(k+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

   Donc, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ S_k \text{ suit une loi de Pascal de paramètre } (k,p)}$.

2. On se ramène à la formule du binôme négatif :

$$\sum_{s=n}^{+\infty} \binom{s}{n} q^{s-n} = \sum_{s=n}^{+\infty} \frac{s!}{n!(s-n)!} q^{s-n} = \frac{1}{n!} \sum_{s=n}^{+\infty} s(s-1)\cdots(s-n+1)q^{s-n}.$$

   On reconnaît la dérivée n-ième de la série géométrique, donc, d'après la formule du binôme négatif,

$$\boxed{\sum_{s=n}^{+\infty} \binom{s}{n} q^{s-n} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{(1-q)^{n+1}} = \frac{1}{(1-q)^{n+1}}.}$$

3. • $S_n - 1$ est à valeurs dans $[\![n-1, +\infty[\![$, donc P_n est à valeurs dans $[0, 1]$, qui est l'intervalle des valeurs possibles de p.

   • $(T_1, \cdots, T_n)$ est un échantillon i.i.d. de loi parente la loi géométrique de paramètre p inconnu, et P_n s'exprime comme une fonction continue de ces n variables. Ainsi, P_n est une statistique sur l'échantillon i.i.d. $(T_1, \cdots T_n)$.

   Ainsi $\boxed{P_n \text{ est un estimateur de } p.}$

   • De plus, d'après le théorème de transfert, P_n admet une espérance si et seulement si la série suivante est absolument convergente :

$$\sum_{k \geqslant n} \frac{n-1}{k-1} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}.$$

   Puisqu'elle est à termes positifs, il suffit d'étudier sa convergence. Or, son terme général est égal, après manipulation des facorielles, à $\binom{k-2}{n-2} p^n q^{k-n}$, qui est, à un facteur constant p^n près, le terme général d'une série du binôme négatif (dérivée des séries géométriques), de raison $q \in [0,1[$. Ainsi, elle est convergente. Par conséquent, $\boxed{P_n \text{ admet une espérance}}$, et :

$$E(P_n) = p^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-2}{n-2} q^{k-n} = p^n \sum_{k=n-2}^{+\infty} \binom{k}{n-2} q^{k-(n-2)},$$

et, d'après la question 2,

$$E(P_n) = p^n \cdot \frac{1}{(1-q)^{n-1}} = p.$$

Ainsi, le biais de P_n en tant qu'estimateur de p est $\boxed{b_{P_n}(p) = 0}$

On en déduit que $\boxed{P_n \text{ est un estimateur sans biais de } p}$.

4. L'existence de l'espérance de $\frac{(n-1)^2}{(S_n-1)(S_n-2)}$ se montre comme précédemment, puisque, d'après le théorème de transfert, on est ramené à l'étude de la série :

$$\sum_{k \geqslant n} \frac{(n-1)^2}{(k-1)(k-2)} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = \sum_{k \geqslant n} \frac{n-1}{n-2} \binom{k-3}{n-3} p^n q^{k-n}.$$

Cette série étant absolument convergente en tant que série dérivée de la série géométrique, il vient, d'après la question 2,

$$E\left(\frac{(n-1)^2}{(S_n-1)(S_n-2)}\right) = \frac{n-1}{n-2} p^n \sum_{k \geqslant n} \binom{k-3}{n-3} q^{k-n} = \frac{n-1}{n-2} \frac{p^n}{(1-p)^{n-2}}.$$

Ainsi, $\boxed{E\left(\frac{(n-1)^2}{(S_n-1)(S_n-2)}\right) = p^2 \cdot \frac{n-1}{n-2}}$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé Tchébychev,

$$0 \leqslant P(|P_n - p| > \varepsilon) \leqslant \frac{V(P_n)}{\varepsilon^2}. \tag{1}$$

Or,

$$0 \leqslant V(P_n) = E(P_n^2) - E(P_n)^2 = E\left(\frac{(n-1)^2}{(S_n-1)^2}\right) - p^2.$$

Or, $S_n - 1 \geqslant S_n - 2$, donc, $S_n - 1$ ne prenant que des valeurs positives, $\frac{(n-1)^2}{(S_n-1)^2} \leqslant \frac{(n-1)^2}{(S_n-1)(S_n-2)}$, et donc, par croissance de l'espérance :

$$E(P_n^2) \leqslant E\left(\frac{(n-1)^2}{(S_n-1)(S_n-2)}\right) = p^2 \cdot \frac{n-1}{n-2}.$$

Par conséquent, on obtient :

$$0 \leqslant V(P_n) \leqslant p^2 \cdot \left(\frac{n-1}{n-2} - 1\right) = \frac{p^2}{n-1}.$$

D'après le théorème d'encadrement, il vient donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V(P_n) = 0$, et donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{V(P_n)}{\varepsilon^2} = 0$.

En utilisant une nouvelle fois le théorème d'encadrement à l'inégalité (1), on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} (P(|P_n - p| > \varepsilon)) = 0.$$

Ainsi, $\boxed{P_n \text{ est un estimateur convergent de } p.}$

Correction de l'exercice 9 – (Oral HEC 2009)

1. Une suite (X_n) de variables aléatoires réelles converge vers une variable aléatoire X si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivant des lois de Poisson de paramètres θ_n, de limite nulle. Alors, d'après un corollaire de l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$0 \leqslant P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n^2 > \varepsilon^2) \leqslant \frac{E(Y_n^2)}{\varepsilon^2}.$$

Or, $E(Y_n^2) = V(Y_n) + E(Y_n)^2 = \theta_n + \theta_n^2$, donc $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n^2) = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0,$$

et par conséquent, (Y_n) converge en probabilité vers 0.

2. (a) La fonction F coïncide sur les intervalles ouverts $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ avec des fonctions polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. De plus :
   - $*$ $\lim_{x\to-1^-} 0 = 0 = \lim_{x\to-1^+} \frac{1}{2}(x+1)^2 = F(-1)$, donc F est continue en -1
     $*$ pour tout x de $]-1,0[$, $F'(x) = x+1$, donc F' admet une limite à gauche et une limite à droite en -1 égales toutes deux à 0.
     Ainsi, F étant continue en -1, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ en -1.
   - $*$ $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{2}(x+1)^2 = \frac{1}{2} = \lim_{x\to0^+} 1-\frac{1}{2}(x-1)^2 = F(0)$, donc F est continue en 0
     $*$ D'après le point précédent, F' admet une limite à gauche en 0, égale à 1. De plus, pour tout x de $]0,1[$, $F'(x) = -(x-1)$, donc F' admet également une limite à droite en 0, égale à 1.
     Ainsi, F étant continue en 0, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.
   - $*$ $\lim_{x\to0^-} 1-\frac{1}{2}(x-1)^2 = 1 = \lim_{x\to0^+} 1 = F(1)$, donc F est continue en 0
     $*$ D'après le point précédent, F' admet une limite à gauche en 1, égale à 0. De plus, pour tout x de $]1,+\infty[$, $F'(x) = 0$, donc F' admet également une limite à droite en 0, égale à 0.
     Ainsi, F étant continue en 1, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ en 1.

   Par conséquent, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

   (b) D'après ce qui précède, nous avons donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou si } x \geqslant 1 \\ x+1 & \text{si } x \in [-1,0[\\ 1-x & \text{si } x\in[0,1[. \end{cases}$$

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car F est de classe $\mathcal{C}^1$), positive, donc il en est de même de f_θ. De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x)\ \mathrm{d}x$$

   est de même nature que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\ \mathrm{d}y,$$

   d'après le théorème de changement de variables, en posant $y = x-\theta$, changement de variable strictement croissant de classe $\mathcal{C}^1$, bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Puisque f est continue par morceau et à support borné, cette intégrale est convergente, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_{-1}^{0}(x+1)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 (1-x)\ \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\Big[(x+1)^2\Big]_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\Big[(1-x)^2\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(1-0-0+1) = 1.$$

   Ainsi, $\boxed{f_\theta \text{ est bien une densité.}}$

   (c) Commençons par le cas $\theta = 0$, c'est-à-dire $f = f_\theta$. Notons X_0 une variable admettant f comme densité. Comme f est à support borné, X_0 admet une espérance et une variance. De plus, on a :

$$E(X_0) = \int_{-1}^{0} x(x+1)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 x(1-x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0.$$

Ainsi $\boxed{E(X_0) = 0}$ et de même :

$$E(X_0^2) = \int_{-1}^{0} x^2(x+1)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

On en déduit donc, d'après la formule de König-Huyghens, que $\boxed{V(X_0) = E(X_0^2) = \frac{1}{6}.}$

Revenons au cas général f_θ est à support borné égal à $[-1+\theta, 1+\theta]$. Ainsi, X possède une espérance et une variance.

De plus,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x-\theta)\ \mathrm{d}x = \int_{\infty}^{+\infty} (y+\theta)f(y)\ \mathrm{d}y = E(X_0+\theta),$$

d'après le même changement de variables que plus haut, et d'après le second théorème de transfert. Ainsi, par linéarité de l'espérance, $\boxed{E(X) = E(X_0) + \theta = \theta.}$

De la même manière :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x-\theta)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} (y+\theta)^2\ \mathrm{d}y = E((X_0+\theta)^2).$$

On en déduit donc que :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E((X_0+\theta)^2) - E(X_0+\theta)^2 = V(X_0+\theta) = V(X_0),$$

donc $\boxed{V(X) = \frac{1}{6}}$.

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi, admettant pour densité f_θ.

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $U_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $V_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

   (a) Remarquons pour commençer que la fonction de répartition des X_i est F_θ définie par $F_\theta(x) = F(x-\theta)$ (dérivez, on obtient bien f_θ !)

   Soit $x \in \mathbb{R}$. L'événement $[\inf(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant x]$ est réalisé si et seulement si au moins une des variables X_i prend une valeur plus petite que x. Ainsi :

$$[\inf(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant x] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x],$$

   et par conséquent, par passage au complémentaire :

$$P(\inf(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant x) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x),$$

   les variables X_i étant mutuellement indépendantes. Ainsi, en reprenant le complémentaire,

$$P(\inf(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(X_i \leqslant x)) = 1 - (1 - F_\theta(x))^n$$

   Ainsi, la fonction de répartition de U_n est : $\boxed{x \mapsto F_{U_n}(x) = 1 - (1 - F(x-\theta))^n.}$

   Soit $x \in \mathbb{R}$. L'événement $[\sup(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant x]$ est réalisé si et seulement si toutes variables X_i prennent une valeur plus petite que x. Ainsi :

$$[\sup(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x],$$

   et par conséquent :

$$P(\sup(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = F_\theta(x)^n,$$

   les variables X_i étant mutuellement indépendantes. Ainsi, la fonction de répartition de V_n est : $\boxed{x \mapsto F_{V_n}(x) = F(x -}$

   Remarquez que F étant de classe $\mathcal{C}^1$, il en est de même de F_{U_n} et de F_{V_n}. Ainsi, U_n et V_n sont des variables à densité.

(b) Soit $\omega \in \Omega$ tel que $-1+\theta \leqslant U_n(\omega) < -1+\theta+2\varepsilon$ et $1+\theta-2\varepsilon < V_n(\omega) \leqslant 1+\theta$. Alors, en sommant ces inégalités, il vient :

$$2\theta - 2\varepsilon < U_n(\omega) + V_n(\omega) < 2\theta + 2\varepsilon,$$

et par conséquent,

$$-\varepsilon < \frac{U_n(\omega) + V_n(\omega)}{2} - \theta < \varepsilon \qquad \text{donc:} \qquad \left| \frac{U_n(\omega) + V_n(\omega)}{2} - \theta \right| < \varepsilon.$$

On en déduit une inclusion d'événements :

$$[-1+\theta \leqslant U_n < -1+\theta+2\varepsilon] \cap [1+\theta-2\varepsilon < V_n \leqslant 1+\theta] \subset \left[\left| \frac{U_n + V_n}{2} - \theta \right| < \varepsilon \right],$$

et donc une inégalité sur les probabilités :

$$\boxed{P([-1+\theta \leqslant U_n < -1+\theta+2\varepsilon] \cap [1+\theta-2\varepsilon < V_n \leqslant 1+\theta]) \leqslant P\left(\left[\left| \frac{U_n + V_n}{2} - \theta \right| < \varepsilon \right] \right).}$$

(c) Les deux événements de l'intersection du terme de gauche n'étant pas indépendants, on ne peu pas s'en sortir sans revenir aux définitions de U_n et V_n, en essayant d'adapter le calcul des fonctions de répartition de U_n et V_n à ce cas mixte.
L'événement $[-1+\theta \leqslant U_n < -1+\theta+2\varepsilon] \cap [1+\theta-2\varepsilon < V_n \leqslant 1+\theta]$ est réalisé si et seulement si au moins un des X_i prend unne valeur strictement inférieure à $-1+\theta+2\varepsilon$ et si au moins un des X_i prend une valeur strictement supérieure à $1+\theta-2\varepsilon$ (les deux autres inégalités étant nécessairement satisfaites, puisque les X_i prennent leurs valeurs dans $[-1+\theta, 1+\theta]$).
Ainsi, en notant A l'événement égal à cette intersection :

$$A = [-1+\theta \leqslant U_n < -1+\theta+2\varepsilon] \cap [1+\theta-2\varepsilon < V_n \leqslant 1+\theta] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i < -1+\theta+2\varepsilon] \cap \bigcup_{i=1}^{n} [X_i > 1+\theta-2\varepsilon].$$

On a donc, par passage au complémentaire :

$$P(A) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \geqslant -1+\theta+2\varepsilon] \cup \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant 1+\theta-2\varepsilon] \right),$$

et, en utilisant la formule de la probabilité d'une union :

$$\begin{aligned} P(A) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \geqslant -1+\theta+2\varepsilon] \right) - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant 1+\theta-2\varepsilon] \right) \\ + P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \geqslant -1+\theta+2\varepsilon] \cap \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant 1+\theta-2\varepsilon] \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geqslant -1+\theta+2\varepsilon) - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geqslant -1+\theta+2\varepsilon) \\ + P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [-1+\theta+2\varepsilon \leqslant X_i \leqslant 1+\theta-2\varepsilon] \right), \end{aligned}$$

et, en supposant $\varepsilon < \frac{1}{2}$, il vient alors :

$$P(A) = 1 - F_\theta(-1+\theta+2\varepsilon)^n - F_\theta(1+\theta-2\varepsilon)^n + (F_\theta(1+\theta-2\varepsilon) - F_\theta(-1+\theta+2\varepsilon))^n,$$

soit :

$$P(A) = 1 - F(-1+2\varepsilon)^n - F(1-2\varepsilon)^n + (F(1-2\varepsilon) - F(-1+2\varepsilon))^n.$$

Or, pour tout ε fixé dans $]0, \frac{1}{2}[$, $F(-1+2\varepsilon)$, $F(1-2\varepsilon)$ et $F(1-2\varepsilon) - F(-1+2\varepsilon)$ sont dans $]0,1[$ (d'après l'expression de F). Par conséquent,

$$\lim_{n \to +\infty} P(A) = 1.$$

Or,
$$P(A) \leqslant P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right) \leqslant 1,$$
donc, d'après le théorème d'encadrement
$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right)=1 \qquad \text{soit:} \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|\geqslant\varepsilon\right)=0.$$
Ainsi, $\dfrac{U_n+V_n}{2}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à θ ; autrement dit, $\boxed{\dfrac{U_n+V_n}{2} \text{ est un estimateu}}$

(d) C'est un argument de symétrie : f est pair, donc f_θ (son translaté) est symétrique par rapport à la valeur θ. Cela peut nous permettre d'exprimer $E(U_n)$ en fonction de $E(V_n)$, sans effectuer le calcul de ces espérances :
Soit $Y_1,\dots,Y_n$ les variables aléatoires définies par $Y_n = 2\theta - X_i$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$F_{Y_i}(x) = P(2\theta - X_i \leqslant x) = P(X_i \geqslant 2\theta - x) = 1 - F_\theta(2\theta - x) = 1 - F(\theta - x) = F(x-\theta) = F_{X_i}(x),$$
d'après l'expression de F. Ainsi, Y_i et X_i ont même loi.
De plus,
$$\inf(Y_1,\cdots,Y_n) = 2\theta + \inf(-X_1,\dots,-X_n) = 2\theta - \sup(X_1,\cdots,X_n),$$
et donc
$$E(\inf(Y_1,\cdots Y_n)) = 2\theta - E(V_n).$$
Or, les Y_i suivant les mêmes lois que les X_i, et étant mutuellement indépendants, $\inf(Y_1,\cdots Y_n)$ suit la même loi que U_n, et on obtient donc :
$$E(U_n)+E(V_n) = 2\theta \qquad \text{donc:} \qquad E\left(\frac{U_n+V_n}{2}\right)=\theta.$$
Par conséquent, $\boxed{\dfrac{U_n+V_n}{2} \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$
Cette méthode permettant de relier sup **et** inf **par symétrique est valable dès lors que la fonction de répartition est paire, ou plus généralement, symétrique par rapport à une certaine valeur θ (c'est-à-dire $x\mapsto f(x-\theta)$ est paire).**

Correction de l'exercice 10 –

1. Les X_i suivent une loi $\mathcal{E}(c) = \Gamma\left(\frac{1}{c},1\right)$. Par stabilité de la loi Gamma, les X_i étant mutuellement indépendants, $\boxed{S_n \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{c},n\right)}$ On en déduit que $\boxed{E(S_n)=\dfrac{n}{c}}$ et $\boxed{V(S_n)=\dfrac{n}{c^2}}$.
2. (a) Soit f une densité de S_n. D'après le théorème de transfert, l'espérance $E(T_n)$ existe si et seulement si l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. L'intégrande étant positive (f étant nulle sur $\mathbb{R}_-$), il suffit de vérifier qu'elle est convergente. Or, d'après l'expression d'une densité d'une loi Gamma, on a :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{n}{t}\frac{c^n}{(n-1)!} t^{n-1}\mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t = \frac{nc^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-2}\mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t.$$
Puisqu'on a supposé que $n\geqslant 2$, l'intégrande est continue sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.
Posons $u=ct$. Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant, bijectif de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$. Ainsi, d'après le théorème de changement de variables, l'intégrale ci-dessus a même nature que
$$\frac{nc^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{c}\right)^{n-2}\mathrm{e}^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{c}.$$
Il s'agit, à une constante près, d'une intégrale Γ de paramètre $n-1>0$, donc convergente. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{n}{t}f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente (donc absolument convergente, comme expliqué plus haut), donc $E(T_n)$ existe, et les calculs précédents amènent :
$$E(T_n) = \frac{nc^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{c}\right)^{n-2}\mathrm{e}^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{c} = \frac{nc}{(n-1)!}\Gamma(n-1) = \frac{n(n-2)!}{(n-1)!} = \boxed{\frac{n}{n-1}c = E(T_n)}$$

(b) • T_n est une variable aléatoire s'écrivant comme une fonction continue des variables $X_1, \dots, X_n$, qui forment un échantillon i.i.d. De plus, T_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ensemble dans lequel c prend ses valeurs. Ainsi, T_n est un estimateur de c.

• D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n) = c$, donc :

$\boxed{T_n \text{ est un estimateur asymptotiquement sans biais de } c}$.

(c) Pour les mêmes raisons, U_n est un estimateur de c. De plus,

$$E(U_n) = \frac{n-1}{n}E(T_n) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1}c = c.$$

Ainsi, $E(U_n) = c$, donc $\boxed{U_n \text{ est un estimateur sans biais de } c.}$

3. (a) D'après le théorème de transfert $T_n^2 = \frac{n^2}{S_n^2}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2}{t^2} \frac{c^n}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t$$

converge absolument, ce qui équivaut ici, par positivité, à la convergence. Le même changement de variable que précédemment permet de nous ramener à une intégrale Gamma de paramètre $n-2$, et comme on a supposé $n \geqslant 3$, cela fournit la convergence, donc l'existence de $E(T_n^2)$. On obtient alors, toujours en exploitant ce changement de variables :

$$E(T_n^2) = \frac{n^2c^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-3}\mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t = \frac{n^2c^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{c}\right)^{n-3} \mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{c} == \frac{n^2c^2}{(n-1)!}\cdot(n-3)!$$

Ainsi, $\boxed{E(T_n^2) = \dfrac{n^2}{(n-1)(n-2)}c^2}$

On en déduit, d'après la formule de König-Huygens, que

$$V(T_n) = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}c^2 - \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 c^2 \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{V(T_n) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}c^2}.$$

(b) On a alors : $V(U_n) = V\left(\frac{n-1}{n}T_n\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 V(T_n)$, donc $\boxed{V(U_n) = \dfrac{c^2}{n-2}}$.

4. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $E(U_n) = c$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev,

$$0 \leqslant P(|U_n - c| > \varepsilon) < \frac{V(U_n)}{\varepsilon^2} = \frac{c^2}{(n-2)\varepsilon^2}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c^2}{(n-2)\varepsilon^2} = 0$, donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} P(|U_n - c| > \varepsilon) = 0.$$

Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte que U_n converge en probabilité vers la constante c, donc $\boxed{U_n \text{ est un estimteur convergent de } c}$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque T_n n'est pas sans biais, on revient à un corollaire de l'inégalité de Markov :

$$0 \leqslant P(|T_n - c| > \varepsilon) = P((T_n - c)^2 > \varepsilon^2) < \frac{E((T_n - c)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{r_{T_n}(c)}{\varepsilon^2},$$

où $r_{T_n}(c)$ est le risque quadratique de T_n. Or,

$$r_{T_n}(c) = V(T_n) + b_{T_n}(c)^2,$$

et, d'après les calculs précédents, $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{T_n}(c)^2 = 0$ (puisque T_n est asymptotiquement sans biais). Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{T_n}(c) = 0$, donc d'aprsè le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} P(|T_n - c| > \varepsilon) = 0.$$

Ainsi, $\boxed{T_n \text{ est un estimateur convergent de } c.}$

5. On a :

$$r_{T_n}(c) = V(T_n) + b_{T_n}(c)^2 = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}c^2 + (fracnn - 1 - 1)^2 c^2 = \frac{n^2+n-2}{(n-1)^2(n-2)}c^2.$$

De même :

$$r_{U_n}(c) = V(U_n) + b_{U_n}(c)^2 = \frac{c^2}{n-2}.$$

On a alors :

$$r_{T_n}(c) - r_{U_n}(c) = c^2 \cdot \frac{n^2+n-2-(n^2-2n+1)}{(n-1)^2(n-2)} = c^2 \cdot \frac{3n-3}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{3c^2}{(n-1)(n-2)}.$$

Ainsi, $r_{T_n}(c) - r_{U_n}(c) \geqslant 0$, donc $r_{T_n}(c) \geqslant r_{U_n}(c)$. $\boxed{\text{L'estimateur } U_n \text{ est le meilleur.}}$

6. (a) Par définition,

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - \frac{n}{c}}{\frac{\sqrt{n}}{c}} = \boxed{\frac{cS_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} = S_n^*}$$

Les X_i étant mutuellement indépendants, d'après le théorème de la limite centrée, S_n^* converge en loi vers une variable suivant la loi normale centrée réduite. Donc pour n assez grand, on peut considérer que $\boxed{S_n^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$

(b) Pour n assez grand, puisque S_n^* suit une loi normale centrée réduite, on a :

$$P(\Phi^{-1}(0.015) \leqslant S_n^* \leqslant \Phi^{-1}(0.985)) = \Phi(\Phi^{-1}(0.985)) - \Phi(\Phi^{-1}(0.015)) = 0.985 - 0.015 = 0.97.$$

Or, $S_n^* = \dfrac{cS_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\dfrac{c}{T_n} - 1\right)$, donc

$$P\left(\Phi^{-1}(0.015) \leqslant \sqrt{n}\left(\frac{c}{T_n} - 1\right) \leqslant \Phi^{-1}(0.985)\right) = 0.97,$$

donc, en isolant c :

$$P\left(T_n\left(1 + \frac{\Phi^{-1}(0.015)}{\sqrt{n}}\right) \leqslant c \leqslant T_n\left(1 + \frac{\Phi^{-1}(0.985)}{\sqrt{n}}\right)\right) = 0.97.$$

Or, d'après la donnée de l'énoncé, $\Phi^{-1}(0.985) = 2.17$, et, par symétrie de Φ, $\Phi^{-1}(0.015) = -2.17$. Par conséquent,

$$P\left(T_n\left(1 - \frac{2.17}{\sqrt{n}}\right) \leqslant c \leqslant T_n\left(1 + \frac{2.17}{\sqrt{n}}\right)\right) = 0.97.$$

L'intervalle de confiance au taux de confiance 0.97 de c est donc :

$$\boxed{\left[T_n\left(1 - \frac{2.17}{\sqrt{n}}\right), T_n\left(1 + \frac{2.17}{\sqrt{n}}\right)\right]}$$

Application numérique : On obtient l'intervalle $[2\left(1 - \frac{2.17}{100}\right), 2\left(1 + \frac{2.17}{100}\right)]$, c'est à dire $\boxed{[1.9566, 2.0434]}$.

7. (a) On a, par linéarité de l'espérance :

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c^i} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{c}\right)^n}{1 - \frac{1}{c}} = \frac{1}{c-1}\left(1 - \left(\frac{1}{c}\right)^n\right).$$

puisque $c > 1$, on obtient donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} E(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{c-1}}.$$

(b) $X_1 + \cdots + X_n$ n'est pas un estimateur, puisque $(X_1, \cdots X_n)$ n'est pas un échantillon i.i.d.

(c) Soit $x > 0$

- Si $x < 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{X_n}(x) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = 0.$$

- Si $x > 0$,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{X_n}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-c^n x},$$
et, puisque $c > 1$, $-c^n x$ tend vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = 1$.

Ainsi, $F_{X_n}(x)$ converge vers la fonction de répartition d'une variable constante de valeur 0, en tout point en lequel cette fonction de répartition est continue (un calcul rapide montrerait que ce n'est pas le cas en 0, mais c'est sans importance, par définition de la convergence en loi).

Par conséquent, $\boxed{(X_n) \text{ converge en loi vers une variable certaine nulle.}}$