DM n$^{\text{o}}$ 12 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 – L'objet de cet exercice est d'étudier les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = x\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y}.$$

1. **Étude de deux fonctions auxiliaires**
   (a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
      i. Étudier les variations de g. On tracera le tableau de variations de g, en indiquant les limites et les extrema, ainsi que les valeurs annulant g.
      ii. Justifier que g se restreint en une injection sur $]-\infty, 2]$.
   (b) Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $h(x) = x\mathrm{e}^{1-x} + (1-x)\mathrm{e}^{x}$.
      i. Étudier les variations de h' sur $[0,1]$.
      ii. En déduire que h' s'annule sur $[0,1]$ en une unique valeur α que l'on déterminera.
      iii. Étudier les variations de h, et déterminer son maximum et son minimum sur $[0,1]$, ainsi que l'ensemble des points en lesquels ils sont atteints.
2. **Étude des extrema locaux**
   (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Soit $A = (x,y,z)$ un point critique de f.
      i. Montrer que $g(x) = g(y) = g(z)$, où g est la fonction introduite dans la question 1.
      ii. Montrer que si $x > 2$, alors $y > 1$ et $z > 1$, et aboutir à une contradiction.
      iii. En déduire que $x = y = z$, puis justifier que $A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ est l'unique point critique de f.
   (d) Calculer la hessienne de f au point A, et déterminer ses valeurs propres.
   (e) La fonction f admet-elle un extremum local en A ? La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum sur $\mathbb{R}^3$?
3. **Étude d'une restriction**
   Soit $\mathcal{C}$ la contrainte $x + y + z = 1$.
   (a) Montrer que si $B = (x,y,z)$ est point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$, alors $g(x) = g(y) = g(z)$.
   (b) En s'inspirant de la question 2, en déduire que f admet un unique point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$, et déterminer ce point critique.
   (c) Soit $D = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x + y + z = 1\}$. Justifier que f admet un minimum et un maximum sur D, et les déterminer, ainsi que l'ensemble des points en lesquels ils sont atteints. On pourra pour cela utiliser la fonction h introduite en question 1.

Exercice 2 – (d'après INSEEC 2001) Le but de cet exercice est l'étude d'un extremum particulier de la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3 - 4)$.

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.
   (b) Calculer une base orthonormale de vecteurs propres de M.
2. Montrer que $a = (1,1,1)$ est le seul élément de $\mathbb{R}^3$ dont les termes sont non nuls et pour lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont nulles.
3. On pose : $\forall h \in \mathbb{R}^3,\ h = (h_1,h_2,h_3), \quad Q(h) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$, et $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $Q(h) = {}^tHMH$, où M est la matrice étudiée dans la question 1.

(b) Justifier qu'il existe une matrice inversible P, que l'on ne calculera pas, telle que $M = PD\,{}^tP$, où D est une matrice diagonale que l'on précisera.

(c) On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = {}^tPH$. Exprimer $Q(h)$ en fonction de y_1, y_2 et y_3, et des valeurs propres de M.

En déduire que f a un extremum local en a dont on précisera la nature (maximum ou minimum)

4. En utilisant le développement de $(h_1 + h_2 + h_3)^2$, montrer que l'on peut écrire directement $Q(h)$ comme somme de carrés et conclure que f a un extremum en a sans untiliser les questions 3(b) et 3(c).

5. Étudier de même l'unique point critique dont les coordonnées sont toutes non nulles de la fonction de n variables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n(x_1 + \cdots + x_n - n - 1).$$

Exercice 3 – *Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction de n variables réelles, notée f, définie par :*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) Calculer les dérivées premières et secondes de f.

2. (a) Déterminer le seul point critique $(a_1, \ldots, a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et J_n la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

3. (a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

   (b) Calculer le produit $J_n \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n, puis celles de A_n.

4. (a) Montrer que pour tout $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ no nul, on a ${}^tHA_nH > 0$.

   (b) En déduire que f admet un minimum local en $(a_1, \ldots, a_n)$, et que ce minimum est égal à $-\frac{n}{4(n+1)}$.

Exercice 4 – Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Arctan} x_i$.

1. La fonction f admet-elle un extremum local ou global sur $\mathbb{R}^2$?

2. Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$, et soit $D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid x_1 + \cdots + x_n = s\}$.

   (a) Montrer que f admet un maximum sur D.

   (b) Montrer que f admet dans $(\mathbb{R}_+^*)^n$ un unique point critique A sous la contrainte $\mathcal{C} : x_1 + \cdots + x_n = s$.

   (c) Calculer la hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$, et en déduire que la restriction de f à D admet en A un maximum global.

   (d) Quel est le maximum de f sur $T = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leqslant s\}$?