# DM n° 2 – Série
# DEVOIR FACULTATIF

## Problème – Équivalents et développements asymptotiques de séries liées aux diviseurs

*Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $\sigma_n = \sum_{d|n} 1$, *le nombre de diviseurs de* $n$, *et* $\tau_n = \sum_{d|n} d$, *la somme des diviseurs de* $n$.
*Ces deux sommes indexées par* $d|n$ *sont les sommes prises sur tous les entiers* $d \in \mathbb{N}^*$ *divisant* $n$.
*Le but de ce problème est d'étudier le comportement à l'infini des sommes partielles des séries* $\sum \sigma_n$ *et* $\sum \tau_n$.
*On pourra admettre dans l'ensemble du problème que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (1)$$

### Questions préliminaires

*Soit* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries convergentes à termes positifs, et soit* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites de leurs restes :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \quad \text{et} \quad s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n.$$

*On suppose de plus que* $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$. *On montre dans ces questions préliminaires qu'alors* $r_n \underset{+\infty}{\sim} s_n$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier que : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, (1-\varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.
2. En déduire que $r_n \underset{+\infty}{\sim} s_n$.

## PARTIE I – Comportement à l'infini des sommes partielles et restes des séries de Riemann

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, et $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}_+$ une application continue décroissante. Montrer que :

$$\forall n \geqslant a,\ \forall p \geqslant n, \quad \int_{n+1}^{p+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} f(k) \leqslant \int_{n}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. (a) En déduire que pour tout $\alpha > 1$ et tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

   (b) Donner un équivalent simple de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ en $+\infty$.

3. (a) Déduire de la question 1 que $\sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k} \underset{p\to+\infty}{\sim} \ln p$.

   (b) *Soit, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln n$, *et* $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   En étudiant la convergence de $\sum v_n$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite $\gamma$, que l'on ne demande pas de déterminer (cette limite s'appelle *constante d'Euler*).
   *Indication : utiliser une des deux formules admises en (1) pour obtenir un équivalent de* $(v_n)$ *en* $+\infty$.

   (c) À l'aide de certaines questions précédentes, montrer que : $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}$.

   (d) En exprimant $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k$ en fonction de $\gamma$ et $u_n$, en déduire que : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

**PARTIE II – Comportement à l'infini des sommes partielles de $\sum \sigma_n$**

*On note, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$ *et* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$

1. Les séries $\sum \sigma_n$ et $\sum \tau_n$ convergent-elle ?
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \text{Card}\left(\left\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid dq \leqslant n\right\}\right)$.
3. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
$$A_n = \left\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid d \leqslant \sqrt{n} \text{ et } q \leqslant \sqrt{n}\right\}$$
$$B_n = \left\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid d \leqslant \sqrt{n} \text{ et } \sqrt{n} < q \leqslant \frac{n}{d}\right\}$$
$$C_n = \left\{(d,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid q \leqslant \sqrt{n} \text{ et } \sqrt{n} < d \leqslant \frac{n}{q}\right\}$$
   Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \text{Card}(A_n) + \text{Card}(B_n) + \text{Card}(C_n)$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Card}(A_n) = \left(E\left(\sqrt{n}\right)\right)^2$, où $E(\sqrt{n})$ désigne la partie entière de $\sqrt{n}$.
   (b) Montrer sans calcul que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Card}(B_n) = \text{Card}(C_n)$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Card}(B_n) = \sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{d}\right) - (E(\sqrt{n}))^2$.
   (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n \leqslant S_n \leqslant D_n$, où :
$$G_n = 2\sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} \left(\frac{n}{d} - 1\right) - n, \qquad \text{et} \qquad D_n = 2n\sum_{d=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{1}{d} - (\sqrt{n}-1)^2.$$
5. (a) Justifier que $\ln\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, et que $E(\sqrt{n}) = \sqrt{n} + O(1)$.
   (b) En déduire, à l'aide de résultats de la partie I, que $D_n = n\ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = D_n - 2\sqrt{n} + 1 - 2E(\sqrt{n})$.
   (d) En déduire que $G_n = n\ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$.
   (e) Montrer que $S_n = n\ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$. Donner un équivalent simple de $S_n$.
   (f) Étudier la convergence de $\sum \frac{1}{S_n^\alpha}$ suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.
   *Indication : pour* $\alpha = 1$*, on pourra se servir de I-1, avec une valeur adéquate de* $n$.

**PARTIE III – Comportement à l'infini des sommes partielles de $\sum \tau_n$**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{2} E\left(\frac{n}{q}\right)\left(E\left(\frac{n}{q}\right) + 1\right)$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un encadement de $T_n$.
3. À l'aide de la partie I, justifier que $\sum_{q=n+1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
4. En déduire, en vous inspirant de la question II-5, que $T_n = \frac{(\pi n)^2}{12} + O(n\ln n)$.
5. En justifiant que si $(u_n)$ tend vers 0, $(1+u_n)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}u_n + o(u_n)$, montrer que :
$$\frac{1}{\sqrt{T_n}} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$
6. En déduire que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{T_n}}$ converge.