DM3 - Séries, intégrales impropres

Exercice 1 – (Produit de Cauchy de deux séries)

1. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs convergentes. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$
   (a) Montrer que
$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} a_k \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} b_k \leqslant \sum_{n=0}^{N} c_n \leqslant \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k.$$
   (b) En déduire que $\sum c_n$ est convergente, et que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$
2. On suppose maintenant que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, mais plus nécessairement à termes positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$c'_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}|.$$
   (a) Justifier que $\sum c'_n$ converge, puis que $\sum c_n$ converge absolument.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\Delta_n = \{(p,q) \in [\![0,n]\!]^2, \quad p+q > n\}$. Montrer que
$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n} c_k\right| \leqslant \sum_{(p,q)\in\Delta_n} |a_p b_q|.$$
   (c) En déduire que
$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n} c_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{k=0}^{n} |b_k| - \sum_{k=0}^{n} c'_k.$$
   (d) En déduire que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$
3. Appliquer le résultat précédent pour montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$
   Que retrouve-t-on ?
4. Appliquer le résultat de cet exercice pour démontrer par récurrence sur n la formule du binôme négatif :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^n = \frac{1}{(1+x)^{p+1}}.$$

Exercice 2 –
Soit $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \operatorname{Arctan} x \, \mathrm{d}x$.

1. Pour quelles valeurs de a, $I(a)$ est-elle convergente ?
2. Soit a tel que $I(a)$ converge. Montrer que : $I(a) = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{2}{a^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x.$

3. Montrer que $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$;en déduire que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 0$.
4. Déterminer un équivalent simple de $I(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 3 – (Ecricome 2009)

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. **Domaine de définition de f**
   (a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ est convergente, et donner sa valeur.
   (b) Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$.

   Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $[0,+\infty[$.

2. **Branche infinie de la courbe représentative de f**
   (a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et tout réel t positif ou nul :
   $$x\mathrm{e}^t \leqslant \sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leqslant x\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}.$$
   (b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}$.
   (c) Préciser alors la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

3. **Dérivabilité et monotonie de f**
   (a) À l'aide du changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :
   $$f(x) = x^2\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$$
   (b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :
   $$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$
   (c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :
   $$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$
   En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4. **Étude locale de f et f' en 0**
   (a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :
   $$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u,$$
   et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ est convergente
   (b) À l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :
   $$f'(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -x\ln(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$
   (c) En déduire que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, et préciser la valeur de $f'(0)$.