DM n° 4 : Intégrales impropres

Exercice 1 – Comparaison par équivalences : un contre-exemple

1. Montrer que $\dfrac{\sin t}{t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sin t}{t}\left(1+\dfrac{\sin t}{\ln t}\right)$
2. Montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.
3. (a) Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur $[\pi,+\infty[$.
   (b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)}$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$ diverge, puis que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\left(1+\frac{\sin t}{\ln t}\right)\mathrm{d}t$ diverge.
4. Conclure.

Exercice 2 – Limite sous le signe somme : un contre-exemple
Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée.

1. Justifier l'existence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0)$.
4. Déterminer, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $g(x)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}$.
5. Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)$ converge et donner sa valeur.
6. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$?

Exercice 3 – (Intégrale de Gauss)
L'objet de cet exercice est de démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Pour tout $t\in[0,1]$, on note f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_t(x)=\mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)}$.
   Calculer f_t' et f_t'', et montrer que : $\forall x\geqslant 0,\ \forall t\in[0,1],\ |f_t''(x)|\leqslant 4(4x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant 16\cdot\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$.
   En utilisant une formule de Taylor pour la fonction f_t, montrer que pour tout x,
   $$\left|\frac{g(x+u)-g(x)}{u} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}f_t'(x)\,\mathrm{d}t\right|$$
   tend vers 0 lorsque u tend vers 0.
   Qu'en déduit-on sur la dérivabilité de g ?
3. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}_+$ par : $h(x)=\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$.
   (a) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x\geqslant 0$, $h'(x)+g'(x)=0$.
   (b) En déduire la valeur de $h(x)+g(x)$.
4. Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4 – Pour tout réels x et y, on pose

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t.$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition de B.
   (b) Justifier que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x,y) = B(y,x)$.
   (c) Déterminer une relation entre $B(x+1,y)$ et $B(x,y+1)$. En déduire que

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y).$$

   (d) Calculer $B(n+1,y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a $1-t \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
   En déduire que pour tout $t \in [0,n]$, on a :

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

   (b) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, on a :

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

   On distinguera les cas $t \in [0,\sqrt{n}]$ et $t \in [\sqrt{n},n]$, ou alors, on appliquera à deux reprises l'inégalité de Taylor-Lagrange, ou encore, on étudiera la convexité de $x \mapsto (1-x)^n$.
   (c) Des questions a et b, déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t$, pour $x > 0$. Conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

   (d) Exprimer $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ en fonction de $B(n+1,x)$. En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

3. (a) Montrer que quand l'entier n tend vers $+\infty$, on a

$$B(n+1,y) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$$

   (b) En déduire que $B(x,y) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\Gamma(y)}{x^y}$.
   (c) Montrer que, pour tous réels x et y strictement positifs,

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

   On pourra utiliser le résultat de la question 2 pour montrer que

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{B(x+n,y)n^y}{B(x,y)}.$$