DM n° 7 : Intégrales impropres

Exercice 1 – (EDHEC 1999)

Une urne contient une boule noire et $n-1$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2.
On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise...
D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1. (a) Quel est le nombre total N de tirages effectués lors de cette épreuve ?
   (b) Pour j éléments de $[\![1, n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules avant le $2j$-ième tirage ? Combien en reste-t-il avant le $(2j+1)$-ième tirage ?

   On désigne par X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au k-ième tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.

2. (a) Calculer $P(X_1 = 1)$, $P(X_2 = 1)$.
   (b) Pour tout entier naturel j de $[\![1, n-1]\!]$, calculer $P(X_{2j+1} = 1)$ et $P(X_{2j} = 1)$.
   (c) En déduire la loi suivie par toutes les variables X_k.
3. Pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, on note U_j l'événement : « on obtient la boule noire pour la première fois au $(2j-1)$-ième tirage. »
   (a) En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)$-ième tirage, montrer que $P(U_n) = 0$.
   Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\quad P(U_j) = \dfrac{n-j}{n(n-1)}$.
   (b) Exprimer l'événement $[X = 1]$ en fonction des U_j, puis en déduire la valeur de $P(X = 1)$.
   (c) Montrer que $P(X = n) = \frac{1}{n!}$.
4. Montrer que $X = \sum\limits_{k=1}^{2n-1} X_k$, puis en déduire l'espérance de X.
5. Soit i un entier naturel compris entre 0 et $n-2$.
   (a) Pour tout j de $[\![1, 2n-2i-2]\!]$, donner la valeur de :
   $$P(X_{2i+j+1} = 1 \mid X_{2i+1} = 1).$$
   (b) En déduire que : $\forall j \in [\![1, 2n-2i-2]\!]$, $\operatorname{cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = -\dfrac{1}{n^2}$.
6. Soit i un entier naturel compris entre 1 et $n-1$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in [\![1, n-i-1]\!],\quad P(X_{2i+2k} = 1 \mid X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.
   (b) Montrer que ; $\forall k \in [\![1, n-i-1]\!],\quad P(X_{2i+2k+1} = 1 \mid X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.
   (c) En déduire que : $\forall j \in [\![1, 2n-2i-1]\!],\quad \operatorname{cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) = \dfrac{i}{n^2(n-i)}$.
7. Montrer que la variance de X est $V(X) = \dfrac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{j}$.

Exercice 2 – (ESCP 2010)

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$.

On pose $q = 1 - p$ et on note α un réel strictement positif et différent de 1.

L'objet de cet exercice est de calculer la probabilité que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha X_n}$ soit convergente, c'est-à-dire de calculer la probabilité de l'événement

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\}.$$

1. Calculer la probabilité de A lorsque $\alpha > 1$.

On suppose désormais que $\alpha \in]0, 1[$; on pose $\beta = 1 - \alpha$.

2. (a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :
$$P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} [X_n > n^\beta]\right) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} q^{n^\beta - 1}.$$
   (b) Étudier la convergence de la série de terme général $q^{n^\beta-1}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} [X_n > n^\beta]\right)$.
   (d) En déduire que $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^\beta]\right)\right) = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on note :

$$A_\beta = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) > n^\beta \text{ pour un nombre fini de valeurs de } n \text{ uniquement}\}.$$

3. (a) Montrer que $A_\beta = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}[X_n \leqslant n^\beta]\right)$.
   (b) Montrer que $P(A_\beta) = 1$.
4. (a) Montrer que pour tout $\omega \in A_\beta$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ est divergente.
   (b) En déduire la probabilité de l'événement A.

Problème 1 – (ESCL 2001) – Endomorphismes cycliques

Rappel

Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $z^n = 1$, d'inconnue z appartenant à $\mathbb{C}$, admet exactement n racines complexes distinctes, qui sont :

$$1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\theta}, \text{ avec } \theta = \frac{2\pi}{n}.$$

Définitions

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

- *On note id_E l'application identique de E.*
- *Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.*
- *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est* cyclique d'ordre *p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :*
  - *(i)* $f^p(x_0) = x_0$
  - *(ii) la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E*
  - *(iii) la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.*

  La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée un cycle *de f.*

Partie I – Etude d'un exemple

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E, et déterminer la matrice associée à f relativement à cette base.
2. Montrer que f est cyclique d'ordre 4, et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f.
3. Montrer que $f^4 = \mathrm{id}_E$.
4. Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Partie II – Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p.
Soit $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

1. Montrer que $p \geqslant n$
2. Montrer que $f^p = \mathrm{id}_E$. En déduire que f est bijective.
3. *On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille*

   $$(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0))$$

   est libre.

   (a) Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$.

   (b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$.

(c) En déduire que $m = n$ et que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$ est une base de E.

4. *On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que :*

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

(a) *On considère l'endomorphisme g de E défini par :*

$$g = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}.$$

Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$.
En déduire : $f^n = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

(b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base

$$(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$$

à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

(c) Montrer : $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \geqslant n - 1$.
En déduire que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

5. *On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n (et $\dim E = n$). Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un cycle de f.*

(a) Montrer que si un nombre complexe λ est valeur propre de f, alors $\lambda^n = 1$.

(b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(x_0, f(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$.

(c) Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.