DM n° 8 : Diagonalisation

Exercice – Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & -6 \\ 4 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Trouver une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M_3 est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Problème –

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On considère un n-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P.
On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}_0$.
On note $f^0 = \mathrm{id}$ et, pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1. (a) Exprimer, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.
   (b) En déduire : $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$, et $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \cdots + a_{n-1}e_n)$.
2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1f + a_0\mathrm{id}$.
   (a) Vérifier : $g(e_1) = 0$.
   (b) Montrer : $\forall i \in \mathbb{N}, \quad g \circ f^i = f^i \circ g$.
   (c) En déduire : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g(e_i) = 0$.
   (d) Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f.
   Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.
   (e) Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P.
3. (a) Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$. On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0\mathrm{id} + \alpha_1f + \cdots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$.
   Calculer $Q(f)(e_1)$.
   (b) En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$, et annulateur de f.
   (c) Soit λ une racine de P.
   Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)R$.
   Vérifier que $(f - \lambda\mathrm{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$.
   (d) Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C.

4. (a) Montrer que, pour tout nombre complexe x, la matrice $C - xI_n$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

   (b) En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5. (a) **Application 2 :** Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

   (b) **Application 3 :** Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^tC$ la transposée de C.

   (a) Montrer que, pour tout nombre complexe t, la matrice $(B - tI_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - tI_n)$ est inversible.

   (b) En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.

   (c) Soit λ une valeur propre de B. Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ.

   (d) On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable, et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible (il s'agit des matrices dites « de Vandermonde »)

7. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ deux à deux distinctes.

   L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

   (a) Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ est une base de E.

   (b) Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1.