

DM n° 8 : Polynômes d'endomorphisme, produits scalaires

Exercice – (extrait de ESCP 1997) – Polynômes de Hermite

Soit  $g$  l'application définie pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on considère l'application  $H_n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} g^{(n)}(x),$$

où, selon l'usage,  $f^{(n)}(x)$  désigne la valeur en  $x$  de la dérivée  $n$ -ième de  $f$  (en particulier  $f^{(0)}(x) = f(x)$ ).

On rappelle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ .

1. (a) Pour tout réel  $x$ , calculer  $H_0(x)$ ,  $H_1(x)$ ,  $H_2(x)$ .
- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Établir les relations

$$H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1} \tag{1}$$

$$H'_n = nH_{n-1} \tag{2}$$

Pour établir (1), on pourra remarquer que  $g^{(n+1)}(x) = h^{(n)}(x)$ , où  $h : x \mapsto -xg(x)$  et utiliser la formule de Leibniz. Pour établir (2), on pourra partir de la définition de  $H_n$ .

- (c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n$  est une fonction polynomiale dont on précisera en fonction de  $n$ , le degré, la parité et le coefficient de plus haut degré.
2. (a) Pour toute fonction polynomiale  $P$ , justifier la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

- (b) Montrer que l'application

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)Q(x) dx$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ . On notera  $\|\cdot\|$  la norme associée.

Ainsi, si  $n$  est un entier naturel, la restriction de ce produit scalaire aux polynômes de degré au plus  $n$  fait de  $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien.

3. (a) Montrer que si  $P$  est un polynôme et  $n$  un entier naturel non nul, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)g^{(n-1)}(x) = 0.$$

(On pourra utiliser la définition de  $H_{n-1}$ )

De même, on montrerait, et **on admet** que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)g^{(n-1)}(x) = 0$ .

- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer

$$\langle H_n, H_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Pour  $n$  non nul, on utilisera pour ce faire la définition de  $H_n$ .

- (c) Soit  $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . En justifiant au préalable que :

$$\langle H_n, H_m \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)g^{(n)}(x) dx,$$

et à l'aide d'une intégration par parties que l'on effectuera avec soin, montrer que :

$$\langle H_n, H_m \rangle = m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle.$$

En déduire que  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille orthogonale de  $\mathbb{R}[X]$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , que vaut  $\langle H_n, H_n \rangle$  ?

## Problème –

Dans tout le problème,  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , de dimension finie  $n$ , et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On étudie dans ce problème quelques propriétés liées à des polynômes annulateurs de  $u$ . On recherche en particulier à exprimer un polynôme annulateur de degré minimal. Cette recherche passe par l'étude des sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme, qui constituent une généralisation de la notion de sous-espaces propres. Nous montrons au passage quelques propriétés de ces sous-espaces caractéristiques, ainsi que le fait qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur (dans  $\mathbb{C}[X]$ ) à racines simples. Les résultats que nous exposons dans ce problème constituent la première étape vers la réduction de Jordan des endomorphismes, qui est une généralisation de la diagonalisation.

### Partie I – La suite des noyaux itérés et les sous-espaces caractéristiques

Dans cette partie,  $\lambda$  désigne une valeur propre de  $u$ .

1. Montrer qu'on a une chaîne d'inclusions

$$\text{Ker}((u - \text{id})^0) \subset \text{Ker}((u - \text{id})^1) \subset \dots \subset \text{Ker}((u - \text{id})^k) \subset \text{Ker}((u - \text{id})^{k+1}) \subset \dots$$

2. Montrer qu'il existe un entier  $k_0$  tel que  $\text{Ker}((u - \text{id})^{k_0}) = \text{Ker}((u - \text{id})^{k_0+1})$  (on pourra étudier la suite des dimensions).
3. Justifier qu'alors, pour tout  $k \geq k_0$ ,  $\text{Ker}((u - \text{id})^k) = \text{Ker}((u - \text{id})^{k_0})$ .

On définit  $n_\lambda$  la plus petite valeur possible de  $k_0$ . Ainsi,  $\text{Ker}((u - \text{id})^{n_\lambda}) = \text{Ker}((u - \text{id})^{n_\lambda+1})$ , et, pour tout  $k < n_\lambda$ ,  $\text{Ker}((u - \text{id})^k) \neq \text{Ker}((u - \text{id})^{k+1})$ .

On définit le sous-espace caractéristique de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$  par :

$$C_\lambda = \text{Ker}((u - \text{id})^{n_\lambda}).$$

4. Justifier que  $C_\lambda \neq \{0\}$ , et que  $C_\lambda$  est stable par  $u$ .
5. Justifier que  $n_\lambda \leq \dim(C_\lambda)$ .
6. Que vaut  $n_\lambda$  si  $u$  est diagonalisable (considérer une certaine matrice diagonale).

### Partie II – Polynôme annulateur de $u$

On considère  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  un polynôme annulateur de  $u$ , et  $\mu$  une racine de  $P$ . On peut donc écrire  $P = (X - \mu)^k Q$ , où  $Q$  est un polynôme n'admettant pas  $\mu$  comme racine (ainsi,  $k$  est l'ordre de multiplicité de la racine  $\mu$  de  $P$ ).

1. Montrer que si  $\mu$  n'est pas valeur propre de  $u$ , alors  $Q$  est un polynôme annulateur de  $u$ .
2. Montrer que si  $\mu$  est valeur propre de  $u$  alors  $\text{Ker}(u - \text{id})^k \subset \text{Ker}(u - \text{id})^{n_\lambda}$ , et en déduire que le polynôme  $(X - \mu)^{n_\lambda} Q$  est encore un polynôme annulateur de  $u$ .
3. En considérant la famille  $(\text{id}, u, \dots, u^{n^2})$ , montrer que  $u$  admet au moins un polynôme annulateur, puis justifier que  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$  est un polynôme annulateur de  $u$ .
4. Montrer que si  $u$  est diagonalisable, alors il existe un polynôme annulateur de  $u$  dont toutes les racines sont simples, et exprimer ce polynôme en fonction des valeurs propres de  $u$ .

### Partie III – Expression de $E$ comme somme directe des sous-espaces caractéristiques

1. Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  sans racine commune. On ne suppose pas dans cette partie que  $P$  et  $Q$  sont des polynômes annulateurs de  $u$ .

(a) Montrer que  $\text{Ker}(P(u))$  et  $\text{Ker}(Q(u))$  sont stables par  $u$ .

Ainsi,  $u$  se restreint en un endomorphisme  $u_1$  de  $\text{Ker}(P(u))$  et en un endomorphisme  $u_2$  de  $\text{Ker}(Q(u))$ .

- (b) Justifier que  $P$  est un polynôme annulateur de  $u_1$  et que  $Q$  est un polynôme annulateur de  $u_2$ .
- (c) En déduire que les racines du polynôme  $Q$  ne sont pas des valeurs propres de  $u_1$ , puis, en factorisant  $Q$ , montrer que  $Q(u_1)$  est un automorphisme de  $\text{Ker}(P(u))$ .
- (d) Montrer que la somme  $\text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u))$  est directe.

2.  $P$  et  $Q$  sont toujours deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  sans racine commune.

- (a) Soit  $x \in \text{Ker}((PQ)(u))$ . Montrer, en utilisant une des questions précédentes, qu'il existe un unique élément  $x_1$  de  $\text{Ker}(P(u))$  tel que

$$Q(u)(x) = Q(u)(x_1).$$

Montrer de même qu'il existe un unique élément  $x_2$  de  $\text{Ker}(Q(u))$  tel que

$$P(u)(x) = P(u)(x_2).$$

- (b) Justifier que  $x_2 = x - x_1$ .
- (c) En déduire que  $\text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$ .

3. En utilisant les résultats de la partie II, en déduire que :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} C_\lambda.$$

- 4. Montrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $n_\lambda = 1$ .
- 5. (a) Soit  $u_\lambda$  la restriction de  $u$  au sous-espace stable  $C_\lambda$ . Montrer qu'il existe  $v_\lambda$  et  $w_\lambda$  deux endomorphismes de  $C_\lambda$  tels que  $v_\lambda$  soit diagonalisable et  $w_\lambda$  soit nilpotent, et tels que  $v_\lambda \circ w_\lambda = w_\lambda \circ v_\lambda$ .
- (b) En déduire que tout endomorphisme  $u$  de  $E$  peut s'écrire comme la somme d'un endomorphisme diagonalisable  $v$  et d'un endomorphisme nilpotent  $w$  tels que  $v \circ w = w \circ v$ .

#### Partie IV – Polynôme annulateur minimal de $u$

- 1. Soit  $P$  un polynôme annulateur de  $u$ . En utilisant certains résultats de la partie précédente, et la « minimalité » de  $n_\lambda$ , montrer que toute valeur propre  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  est racine de  $P$ , de multiplicité au moins égale à  $n_\lambda$ .
- 2. En déduire que tout polynôme annulateur de  $u$  est divisible par  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$ , et que par conséquent, ce dernier polynôme est un polynôme annulateur de degré minimal.
- 3. Montrer que tout endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel (sur  $\mathbb{C}$ ) de dimension  $n$  admet un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- 4. Montrer, à l'aide de la question 2, que si  $u$  admet un polynôme annulateur à racines simples, alors  $u$  est diagonalisable.

*Ce dernier résultat constitue une réciproque de la question II-4.*