

DS n° 2 : Intégrales impropres

Problème 1 – (EDHEC 2007)

On désigne par n un entier naturel non nul et, dans les deux premières parties de ce problème, on considère une urne contenant une boule blanche et $n-1$ boules noires. Trois joueurs notés A, B et C tirent à tour de rôle une boule de cette urne dans l'ordre suivant : A joue le premier, B joue après A, C joue après B, puis A joue après C etc. Le gagnant est le premier des trois qui extrait la boule blanche.
Pour tout k de $\mathbb{N}$, on note A_k (resp. B_k, C_k) l'événement « A (resp B, C) gagne la partie lors du k-ième tirage ».
On note A (resp. B, C) l'événement « A (resp B, C) gagne la partie ».
L'objectif de ce problème est de comparer les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ selon le mode de tirage et, dans la troisième partie, avec une urne remplie aléatoirement.

Partie I – Les tirages se font avec remise de la boule tirée

1. Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $P(A_{3k+1})$, $P(B_{3k+2})$ et $P(C_{3k+3})$.
2. En déduire $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ et vérifier que $P(A) > P(B) > P(C)$. Ce résultat était-il prévisible ?

Partie II – Les tirages se font sans remise de la boule tirée.

1. Montrer que, pour tout entier naturel k tel que $3k+3 \leqslant n$:
$$P(A_{3k+1}) = P(B_{3k+2}) = P(C_{3k+3}) = \frac{1}{n}.$$
2. (a) On suppose dans cette question que $n = 3m+1$, avec $m \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$P(A) = \frac{m+1}{3m+1}, \qquad P(B) = P(C) = \frac{m}{3m+1}.$$
   (b) On suppose, dans cette question, que $n = 3m+2$, avec $m \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$$P(A) = P(B) = \frac{m+1}{3m+2}, \qquad P(C) = \frac{m}{3m+2}.$$
   (c) On suppose, dans cette question, que $n = 3m+3$, avec $m \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}.$$
3. Conclure.

Partie III – Les tirages se font sans remise, dans une urne remplie aléatoirement.

L'urne est remplie de la façon suivante : on lance une pièce qui donne « pile » avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, et « face » avec la probabilité $1-p$. On pose $q = 1-p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers.
Si N prend la valeur n $(n \in \mathbb{N}^*)$, on place une boule blanche et $n-1$ boules noires dans l'urne et on procède à l'expérience décrite dans l'introduction, sans remise des boules tirées.

1. (a) En utilisant certains résultats de la partie II, donner, en fonction de m, les valeurs de $P_{[N=3m+1]}(A)$, $P_{(N=3m+2)}(A)$ et $P_{[N=3m+3]}(A)$.
   (b) En déduire que $P(A) = \dfrac{pq^2}{3(1-q^2)} + \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+1} q^{3m} p.$
2. De la même façon, établir que $P(B) = \dfrac{pq^2}{3(1-q^3)} + \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{3m+1} q^{3m} p.$
3. Déterminer, toujours de la même façon, une expression analogue de $P(C)$.
4. Conclure.

Dans les 3 questions suivantes, on cherche à déterminer une expression intégrale de $P(A)$.

5. (a) Pour tout x de $[0,1[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, écrire explicitement $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} x^{3m}$ en fonction de x et n.

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \frac{q^{3m+1}}{3m+1} = \int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{1-x^3} - \int_0^q \frac{x^{3n}}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$.

   (c) Établir enfin que $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q^{3m+1}}{3m+1} = \int_0^q \frac{1}{1-x^3}$.

6. Montrer que la même façon, que $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q^{3m+2}}{3m+2} = \int_0^q \frac{x}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$.

7. (a) Déterminer les constantes a, b, c et d telles que, pour tout m de $\mathbb{N}$:

$$\frac{m+1}{3m+1} = a + \frac{b}{3m+1} \qquad \text{et} \qquad \frac{m+1}{3m+2} = c + \frac{d}{3m+2}.$$

   (b) En déduire que $P(A) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{p}{3q}\displaystyle\int_0^q \frac{2+x}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$.

8. Établir enfin que, lorsque $p = \frac{1}{2}$, on a $P(A) \geqslant \frac{17}{24}$.

Les questions de la fin de cette partie ne sont pas dans le sujet original

9. (a) Déterminer des réels α, β et γ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\quad \frac{x+2}{1-x^3} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+x+1}.$$

   (b) En déduire, en fonction de q, l'expression de $\displaystyle\int_0^q \frac{2+x}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$.

   (c) Déterminer la limite, lorsque p tend vers 0 (donc q tend vers 1) de $P(A)$. Le résultat est-il logique ?

   (d) Déterminer la limite, lorsque p tend vers 1, de $P(A)$. Le résultat est-il logique ?

10. Montrer que la fonction $p \mapsto P(A)$ est strictement croissante sur $]0,1[$, et en déduire que pour tout $p \in]0,1[$, $p(A) > \frac{1}{3}$.

Partie IV – Simulation informatique

On décide de coder l'événement « on obtient la boule blanche » par le nombre 0
On rappelle que la fonction `random` *renvoie, pour un argument n de type* `integer` *(avec $n \geqslant 1$) un entier aléatoire compris entre* 0 *et* $n-1$.

1. Compléter le programme Pascal suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans la partie I et en affiche le vainqueur.

```
program edhec_2007;
var a,b,c,n:integer;
begin
  readln(n); randomize;
  repeat
    a:=random(n);
    if a=0 then ...........
    else begin
           b:=...........;
           if b=0 then .............
           else begin
                  c:=..............;
                  if c=0 then ..............;
                end;
         end;
  until (a*b*c=0);
end.
```

2. Modifier ce programme pour qu'il affiche qui est le vainqueur de ce jeu dans le cadre de la partie II.

Problème 2 –

Le but de ce problème est d'étudier la nature de certaines séries dont l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ *est un cas particulier.*

Partie I – L'intégrale de Dirichlet $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que I est convergente. (On pourra faire une intégration par parties)
2. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\, \mathrm{d}t$.
   (a) En utilisant une formule de trigonométrie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n-1} = 0$.
   (b) En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (Lemme de Lebesgue) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$, alors $J_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)\, \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que l'application définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ peut être prolongée par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
5. En déduire que $I = \frac{\pi}{2}$.

Partie II – Étude d'intégrales du type $\int_0^{+\infty} \sin(t) f(t)\, \mathrm{d}t$

1. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, décroissante de limite nulle en $+\infty$.*
   (a) Justifier que $\int_0^{+\infty} f'(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente
   (b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{+\infty} \sin t f(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente.
2. *On suppose toujours que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, décroissante de limite nulle en $+\infty$, mais f n'est ici pas nécessairement dérivable.*
   (a) A l'aide d'un changement de variables, montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| f(t)\, \mathrm{d}t \geqslant \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin t| f(t)\, \mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| f(t)\, \mathrm{d}t = 0$.
   (c) En déduire que la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente.
   (d) En déduire enfin que $\int_0^{+\infty} \sin t f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.
3. *On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ est divergente, f étant toujours continue, décroissante et positive.*
   (a) À l'aide d'un théorème du cours qu'on rappellera avec précision, montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n\pi)$ diverge.
   (On pourra au préalable faire un changement de variable simple dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$).
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t| f(t)\, \mathrm{d}t \geqslant 2f(n\pi)$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} |\sin t| f(t)\, \mathrm{d}t = +\infty$, puis que $\int_0^{+\infty} |\sin t| f(t)\, \mathrm{d}t$ diverge.

4. *On suppose maintenant que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, admettant une limite finie non nulle, ou infinie.*
   (a) Montrer qu'il existe deux réels $\delta > 0$ et $x_0 > 0$ tels que pour tout $x > x_0$, $|f(x)| > \delta$, et que f est de signe constant sur $]x_0, +\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout n tel que $n\pi > x_0$, $\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t) \, \mathrm{d}t \right| \geqslant 2\delta$.
   (c) En considérant la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t) \, \mathrm{d}t$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin t f(t) \, \mathrm{d}t$ diverge.
   (d) À quelle condition nécessaire et suffisante sur α l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$ est-elle semi-convergente ? absolument convergente ? divergente ?
   (e) À quelle condition nécessaire et suffisante sur α et $\beta > 0$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\beta)}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$ est-elle semi-convergente ? absolument convergente ? divergente ? (on pourra faire un changement de variables)
5. *Cas où f est dérivable positive de limite nulle, mais pas décroissante.*
   On considère $f : x \mapsto \dfrac{\sin x + 1}{x}$.
   (a) Établir la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}$, et en déduire la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}$
   (b) Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \sin t f(t) \, \mathrm{d}t$? Conclure.

Partie III – Étude d'intégrales du type $\int_1^{+\infty} s(t) f(t) \, \mathrm{d}t$ où s est périodique

Soit T un réel strictement positif. On suppose dans cette partie que s est une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$, de période égale à T.

1. *On suppose que $\int_0^T s(t) \, \mathrm{d}t = 0$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, décroissante et de limite nulle.*
   (a) Justifier l'existence d'une primitive S de s, et vérifier que toute primitive S de s est T-périodique.
   (b) En déduire que toute primitive S de s est bornée.
   (c) En vous inspirant de II-1, montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} s(x) f(x) \, \mathrm{d}x$ est convergente.
2. *On suppose que $\int_0^T s(t) \, \mathrm{d}t \neq 0$ et que $\int_1^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$ diverge, f étant toujours décroissante et positive de limite nulle.*
   (a) Montrer qu'il existe un réel $m \neq 0$ tel que $\int_0^T (s(t) - m) \, \mathrm{d}t = 0$.
   (b) Justifier que $\int_1^{+\infty} (s(t) - m) f(t) \, \mathrm{d}t$ est convergente, et en déduire que $\int_1^{+\infty} s(t) f(t) \, \mathrm{d}t$ est divergente.
3. Exemple.
   (a) À l'aide des résultats de cette partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x$ est :
   - divergente si n est pair et $\alpha \in]0, 1]$,
   - convergente dans les autres cas, c'est-à-dire si n est impair, ou si n est pair et $\alpha > 1$.

   (b) En déduire que pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} \, \mathrm{d}x$ est divergente
   Indication : faire un développement limité en la variable $u = \frac{\sin x}{x^\alpha}$.