## Concours Blanc 1 – Épreuve 1 – (DS n° 3)

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être* éteints *et* rangés.

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre*

### Problème 1 – (Extrait et adapté de HEC 1995)

*Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension $m$, où le nombre entier $m$ est supérieur ou égal à 2.*
*Si $f$ désigne un endomorphisme de $E$ et $k$ un entier strictement positif, on note $f^k$ la composée $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$. On désigne par $I$ l'application identité de $E$ et par $I_m$ la matrice identité d'ordre $m$.*

### Partie I – Étude d'une suite récurrente

*On étudie dans cette partie la convergence des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel $n$ :*

$$u_{n+3} = \frac{1}{3} \cdot (u_{n+2} + u_{n+1} + u_n). \tag{1}$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation (1). Montrer qu'il existe deux complexes conjugués $\alpha$ et $\overline{\alpha}$, que l'on déterminera, et trois complexes $x$, $y$ et $z$, que l'on ne déterminera pas, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = x + y\alpha^n + z\overline{\alpha}^n.$$

2. Justifier que $x$, $y$ et $z$ sont solutions du système

$$\begin{cases} x + y + z = u_0 \\ x + \alpha y + \overline{\alpha} z = u_1 \\ x + \alpha^2 y + \overline{\alpha}^2 z = u_2 \end{cases}$$

   et en déduire une expression de $x$ en fonction de $u_0$, $u_1$ et $u_2$.
   (On pourra à cet effet remarquer que $3\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ et $3\overline{\alpha}^2 + 2\overline{\alpha} + 1 = 0$).

3. Montrer enfin que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{6}(3u_2 + 2u_1 + u_0)$

### Partie II – Étude d'un endomorphisme de polynôme annulateur donné, et d'un projecteur

*On considère désormais un endomorphisme $f$ de l'espace vectoriel $E$ vérifiant la relation :*

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I). \tag{2}$$

1. **Étude des puissances de $f$ et de son inversibilité.**
   *On suppose dans cette question que les endomorphismes $I$, $f$ et $f^2$ sont linéairement indépendants.*
   (a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un triplet $(a_n, b_n, c_n)$ de nombres réels et un seul tel que $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$.
   Déterminer $a_n$, $b_n$, $c_n$ pour $0 \leqslant n \leqslant 2$ et exprimer $a_{n+1}$, $b_{n+1}$, $c_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$, $c_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Prouver que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation (1).
   En déduire les limites $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$ et $c = \lim_{n\to+\infty} c_n$ de ces trois suites.

(c) On convient d'appeler limite de $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$ l'endomorphisme $q = af^2 + bf + cI$. Établir que $q$ est un projecteur.

(d) Prouver que l'endomorphisme $f$ est inversible et exprimer son inverse $f^{-1}$ comme combinaison linéaire de $f^2$, $f$ et $I$.

2. **Étude du projecteur $q$.**

(a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$, associée à un vecteur propre $x$.

i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) = \lambda^n x$, et en déduire que $\lambda^3 = \frac{1}{3}(1 + \lambda + \lambda^2)$.

ii. Montrer que $\lambda \in \{1, \alpha, \overline{\alpha}\}$.

iii. Existe-t-il des homothéties du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ vérifiant (2) ? Si oui, les déterminer toutes.

iv. Existe-t-il un endomorphisme diagonalisable sur $\mathbb{R}$ autre qu'une homothétie vérifiant (2) ?

(b) Montrer que $E$ est somme directe de $\mathrm{Ker}(f - I)$ et de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et que $q$ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ dans la direction $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

(c) Montrer que $\mathrm{Im}(f - I) = \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.
*Ainsi, $q$ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ dans la direction $\mathrm{Im}(f - I)$.*

## Partie III – Étude des solutions de (2)

1. *On suppose dans cette question que* $\dim \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 0$.
Soit $e_1$ un vecteur non nul appartenant à $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Montrer que $(e_1, f(e_1))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. En déduire que $\dim \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I) \geqslant 2$.

2. *On suppose dans cette question et seulement dans cette question que $m = 2$.*
Déterminer les dimensions possibles de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et de $\mathrm{Ker}(f - I)$.
En déduire qu'il existe des bases de $E$ dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme $f$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ?

3. *On suppose dans cette question que* $\dim \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 2$.
Soit $e_2$ un vecteur de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ tel que la famille $(e_1, f(e_1), e_2)$ soit libre. Montrer que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est encore une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. En déduire que

$$\dim \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I) \geqslant 4.$$

4. *On suppose dans cette question que $m = 3$*
Déterminer les dimensions possibles de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et de $\mathrm{Ker}(f - I)$.
En déduire qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme $f$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ?

5. Étudier de la même manière le cas $m = 4$ en précisant les formes possibles de la matrice de l'endomorphisme $f$ dans des bases convenables de $\mathbb{R}^4$.

6. **Étude de la parité de la dimension de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.**

(a) Soit $k$ tel que $2k < \dim \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. On suppose qu'il existe $k$ vecteurs $(e_1, \ldots, e_k)$ tels que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_k, f(e_k))$ forment une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.
Montrer qu'il existe $e_{k+1} \in \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ tel que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ soit une famille libre.

(b) Montrer que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_k, f(e_k), e_{k+1}, f(e_{k+1}))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

(c) Soit $q = \left\lfloor \frac{1}{2} \dim \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I) + \frac{1}{2} \right\rfloor$. Déduire des questions précédentes qu'il existe une famille $(e_1, \cdots, e_q)$ tels que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q))$ soit une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

(d) En déduire que $\dim \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est pair, et que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q))$ en est une base.

7. Montrer qu'il existe une base de $E$ telle que la matrice de $f$ relativement à cette base soit :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_q & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_{m-2q} \end{pmatrix},$$

où $I_{m-2q}$ est la matrice identité d'ordre $m-2q$ et pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, $A_i = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Ainsi, cette matrice est constituée de 0, sauf sur des blocs carrées situés sur sa diagonale.

8. Réciproquement, vérifier que la matrice $M$ obtenue précédemment satisfait bien la relation

$$M^3 = \frac{1}{3}(M^2 + M + I_m).$$

**Problème 2 – (EML 2000)**

*Dans tout ce problème, $a$ est un réel tel que $0 < a < 1$.*

**Partie I – Calcul d'une somme et d'une intégrale**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, \pi]$, on note :

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

   (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, \pi]$ :

$$1 + 2C_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}.$$

   (b) Établir, pour tout nombre complexe $z$ tel que $z \neq 1$ :

$$\sum_{k=-n}^{n} z^k = z^{-n} \frac{1 - z^{2n+1}}{1 - z}.$$

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in ]0, \pi]$ :

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \, \mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

*On note $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ l'application définie par :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x = 0 \\ \dfrac{\cos(ax) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \textit{si } x \in ]0, \pi]. \end{cases}$$

3. Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, et calculer $\varphi'(0)$.

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \, \mathrm{d}x$.

   Montrer, grâce à une intégration par parties, que $I_n$ tend vers 0 quand l'entier $n$ tend vers l'infini.

**Partie II – Calcul de la somme d'une série**

*On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :* $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(nx)\ \mathrm{d}x$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2} I_n + J_n.$$
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, et calculer sa somme (on pourra utiliser les résultats I-2 et I-4.)
3. En utilisant une formule de trigonométrie, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n$ en fonction de $a$ et de $n$.
4. Établir :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2 - a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}.$$

**Partie III – Calcul d'une intégrale**

*Dans cette partie, $\alpha$ désigne un réel tel que $\alpha > 1$.*

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

*On note :* $\quad F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}, \qquad G(\alpha) = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}, \qquad H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

2. (a) Montrer, pour tout réel $t$ de $[0,1]$, et tout $n$ de $\mathbb{N}$ :
$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}.$$
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque l'entier $n$ tend vers l'infini.

   (c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ converge et que : $G(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$.
3. (a) En utilisant le changement de variable défini par $u = t^{1-\alpha}$, montrer :
$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right),$$
   et en déduire :
$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1}.$$
   (b) Établir :
$$F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2 - 1}.$$
4. En utilisant le résultat de II-4, établir finalement :
$$F(\alpha) = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

**(Les questions suivantes ne sont pas dans l'épreuve d'EML)**

5. Retrouver les valeurs de $F(2)$, $F(3)$ et $F\left(\frac{3}{2}\right)$ par un calcul direct (pour la dernière, on pourra faire un changement de variables $t = u^2$)
6. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\ \mathrm{d}t$.
   Exprimer une relation entre $F_n(\alpha)$ et $F_{n+1}(\alpha)$, et en déduire une expression de $F_n(\alpha)$ sous forme d'un produit.