

Concours Blanc 1 – Épreuve 2 BIS – (DS n° 4)
Épreuve de type « Parisiennes »

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème – (d'après ESCP 2007)

Pour toute variable aléatoire réelle Y définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possédant une espérance mathématique, on note $E(Y)$ cette espérance pour la probabilité P .

Pour tout événement C de $\mathcal{A}$ tel que $P(C) > 0$, on note, sous réserve d'existence, $E(Y \mid C)$ l'espérance de Y pour la probabilité conditionnelle P_C (espérance de Y sachant C).

Partie I –

Cette partie constitue une application particulière des résultats généraux étudiés dans la suite du problème.

On possède n urnes ($n \geq 3$) numérotées de 1 à n , dans lesquelles on répartit au hasard et de façon indépendante, m boules indiscernables ($m \geq 4$), de sorte que, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité pour chaque boule d'être placée dans l'urne numéro i soit égale à $\frac{1}{n}$.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

À l'issue de cette expérience, on pose, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'urne numéro } i \text{ est vide} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. (a) Déterminer, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la loi de la variable aléatoire X_i .
(b) Pour tout couple (i, j) d'entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ distincts, calculer $P([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$, ainsi que la covariance de X_i et X_j . Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
2. (a) Exprimer l'espérance $E(W_n)$ et W_n en fonction de n et m .
(b) On note $V(W_n)$ la variance de W_n . Calculer $V(W_n)$ en fonction de n et m .
(c) Vérifier l'égalité : $E(W_n) - V(W_n) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m$.

En déduire que $E(W_n) - V(W_n) \geq 0$

3. Dans cette question, l'entier m vérifie $m = \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor$, où θ est une constante réelle positive et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .
(a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n)$.

(b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0$.

(c) Soit T_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = E(W_n)$.

On admet que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$|P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) \times (\mu_n - V(W_n)).$$

Montrer que la suite de variable aléatoires $(W_n)_{n \geq 3}$ converge en loi vers une variable T suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n)$, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n = k) = P(T = k).$$

4. (Question d'estimation, supprimée)

Partie II –

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

Soit M une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$, et $\bar{A}$ son complémentaire dans $\mathbb{N}$. On rappelle que si A est non vide, alors

$$P([M \in A]) = \sum_{i \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!},$$

et on pose par convention $[M \in \emptyset] = \emptyset$.

On considère la fonction f_A définie sur $\mathbb{N}$ par $f_A(0) = 0$, et pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^\lambda (P([M \in A] \cap [M \leq k]) - P([M \in A]) \times P([M \leq k])).$$

1. (a) Déterminer la fonction f_A dans les cas particuliers $A = \emptyset$ et $A = \mathbb{N}$.

(b) Donner l'expression de $f_A(1)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans les deux cas suivants : $0 \in A$ et $0 \in \bar{A}$.

Exprimer $f_A(2)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans le cas où 0 et 1 appartiennent à A .

2. Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ disjointes.

(a) Montrer que $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.

(b) En déduire que $f_{\bar{A}} = -f_A$.

3. (a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, la fonction f_A vérifie la relation suivante :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} P([M \in \bar{A}]) & \text{si } k \in A \\ -P([M \in A]) & \text{si } k \in \bar{A}. \end{cases}$$

(b) En déduire que si A est non vide et distincte de $\mathbb{N}$, la fonction f_A n'est pas identiquement nulle.

4. Dans cette question, j est un entier naturel non nul, et A est le singleton $\{j\}$. On pose $f_{\{j\}} = f_j$.

(a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité suivante :

$$f_j(k+1) = \begin{cases} \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \geq k+1]) & \text{si } k \geq j \\ -\frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \leq k]) & \text{si } k < j. \end{cases}$$

(b) Calculer $f_j(j+1) - f_j(j)$, et déterminer son signe.

(c) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, différent de j , $f_j(k+1) - f_j(k)$ en distinguant les deux cas : $k > j$ et $k < j$.

En déduire que la différence $f_j(k+1) - f_j(k)$ est positive si et seulement si $k = j$.

(d) Établir les inégalités suivantes : $f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$.

5. On considère le singleton $\{0\}$ et on pose $f_{\{0\}} = f_0$. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante :

$$f_0(k+1) - f_0(k) \leq 0.$$

6. (a) Établir, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante : $f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k)$.

(On distinguera les deux cas : $k \in A$ et $k \in \bar{A}$.)

(b) En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{k \geq 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right).$$

Partie III –

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i , strictement positif.

On pose $\lambda_n = \sum_{i=1}^n p_i$, $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $R_i = W_n - X_i$.

On note M_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ_n . Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$, et f_A la fonction définie dans la partie II, dans l'expression de laquelle on remplace M par M_n et λ par λ_n . On pose $f = f_A$.

1. (a) Établir, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité des variables aléatoires $X_i f(W_n)$ et $X_i f(1 + R_i)$.

(b) En déduire pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité : $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i))$.

2. Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on pose : $Y_i = f(1 + W_n) - f(1 + R_i)$.

Établir la relation suivante : $E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i E(Y_i)$.

3. (a) Établir pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la formule suivante :

$$E(Y_i | [X_i = 1]) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)).$$

(b) Calculer pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $E(Y_i | [X_i = 0])$.

(c) Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i^2 E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)).$$

4. Établir l'inégalité suivante :

$$|E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

5. À l'aide de la question II-3(a), montrer, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]).$$

En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, la majoration suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

6. Dans cette question uniquement, on suppose que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_i = \frac{1}{n+i}$.

- (a) Déterminer $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n p_i^2 = 0$
- (b) Quelle est la limite en loi de la variable aléatoire M_n (ie, la suite $(\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_n = k))_{k \in \mathbb{N}}$ définit-elle une loi, et si oui, laquelle?)
- (c) Déterminer la limite en loi de la suite $(W_n)_{n \geq 2}$.

Partie IV –

Les notations sont identiques à celles de la partie III, mais les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **ne sont pas nécessairement indépendantes**.

1. (a) Montrer que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1])$.
- (b) En déduire l'égalité suivante :

$$P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum_{i=1}^n p_i \left[E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1]) \right]$$

2. On suppose que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, il existe une variable aléatoire Z_i définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la loi de Z_i soit identique à la loi conditionnelle de R_i sachant $[X_i = 1]$
- (a) Justifier, pour tout couple (ℓ, j) d'entiers naturels, l'inégalité : $|f(\ell) - f(j)| \leq |\ell - j| \times \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right)$ et en déduire la majoration suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) \times \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|).$$

- (b) On suppose de plus que pour tout ω de Ω , pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $W_n(\omega) \geq Z_i(\omega)$. Établir l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n),$$

où $V(W_n)$ désigne la variance de W_n .

En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) \times (\lambda_n - V(W_n)).$$