

Concours Blanc 1 – Épreuve 2 – (DS n° 4)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 – (Ecricone 2008)

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

- (a) Montrer que, pour tout réel positif x , la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.
(b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
- Montrer que, pour tout réel positif x , la série de terme général $f'_n(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.
- Étude de la dérivabilité de F**
(a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\text{pour tout } (x, x_0) \in [n, +\infty[, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

- En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x + h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$.
- Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$,

$$\left| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|.$$

- En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' = G$.

4. Recherche d'un équivalent en $+\infty$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

- Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_k(x).$$

- En déduire que, pour $n \geq 2$,

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt.$$

- En déduire que :

$$\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

- Déterminer un équivalent simple de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 – (Ecricome 1996)

Désignant par n un entier naturel, on se propose de déterminer l'ensemble des polynômes $P(X)$ à coefficients réels tels que

$$P(X) + P(X + 1) = 2X^n \quad (1)$$

1. On considère l'application Φ qui, à tout élément $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, associe le polynôme :

$$\Phi[Q(X)] = Q(X) + Q(X + 1).$$

- (a) Établir que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- (b) Notant p un entier naturel, on désigne par Φ_p la restriction de Φ à $\mathbb{R}_p[X]$.
 - i. Montrer que Φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.
 - ii. On note $\mathcal{B}_p = (1, X, X^2, \dots, X^p)$ la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$. Établir que la matrice de Φ_p dans la base $\mathcal{B}_p$ est une matrice triangulaire supérieure dont on déterminera les termes diagonaux.
 - iii. En déduire que Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.
- (c) Prouver que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- (d) Démontrer qu'il existe un polynôme unique de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation (1). On précisera son degré et on le notera $E_n(X)$.

2. On écrit :

$$E_n(X) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} X^k.$$

- (a) Vérifier que :

$$E_n(X + 1) + E_n(X) = \sum_{j=0}^n \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_{n,k} \right] X^j.$$

- (b) En déduire le système dont les $a_{n,k}$ sont les solutions. Préciser la valeur de $a_{n,n}$.
- (c) Déterminer $E_0(X)$, $E_1(X)$ et $E_2(X)$.
- (d) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$E'_n(X) = nE_{n-1}(X)$$

et en déduire l'expression de $E_n^{(k)}(X)$ (dérivée k -ième de $E_n(X)$).

- (e) Montrer que :

$$E_n(X) = (-1)^n E_n(1 - X)$$

et en déduire, pour n pair strictement positif, la valeur de $E_n(0)$ et $E_n(1)$, ainsi que, pour n impair, la valeur de $E_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

- (f) Montrer que si n est pair, 0 et 1 sont les seules racines de E_n dans $[0, 1]$, et si n est impair, $\frac{1}{2}$ est la seule racine de E_n dans $[0, 1]$.
- (g) Montrer que ces racines sont simples.
- (h) Déterminer $E_3(X)$ et $E_4(X)$.

Problème – (Ecricome 2009, adapté et complété)

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels tous deux non nuls, et l'on note $N = a + b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches, et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au « hasard » et « avec remise » d'une boule en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais est remplacée dans cette urne par une boule blanche, et on procède alors au tirage suivant.

La partie IV, consistant en une simulation informatique de l'expérience, peut être traitée indépendamment des autres parties du problème

Partie I – Temps d'attente de la première boule blanche

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Y .
2. Pour tout entier k compris entre 1 et $b + 1$, calculer la valeur de la probabilité $P(Y = k)$.
3. Vérifier que

$$P(Y = b + 1) = \frac{b!}{N^b},$$

et que, pour tout entier k compris entre 1 et b , la formule suivante est vraie :

$$P(Y = k) = \frac{b!}{(b - (k - 1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b - k)!N^k}.$$

4. Soient M un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \dots, a_M$ une famille de réels. Établir que :

$$\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k \right) - Ma_M.$$

5. En déduire que $E(Y) = \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b - k)!N^k}$.

Partie II – Espérance du nombre de boules noires tirées

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geq 1$, q_n la probabilité de l'événement, noté N_n : « la n -ième boule tirée est noire »,
- pour tout entier $n \geq 0$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages. Par convention, $X_0 = 0$;
- pour tous entiers $n \geq 0$ et $k \geq 0$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : « au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires ».

On remarquera que $p_{0,0} = 1$ et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$. Que vaut la somme $\sum_{k=0}^n p_{n,k}$?
2. Calcul de l'espérance de X_n
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Déterminer la loi conditionnelle de X_n sachant $[X_{n-1} = k]$.
 - (b) En déduire que l'espérance conditionnelle $E(X_n | X_{n-1} = k)$ existe et est égale à $k \left(1 - \frac{1}{N} \right) + \frac{b}{N}$.
 - (c) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N} \right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}$.
 - (d) À l'aide de la formule ci-dessus, écrire une fonction en Pascal fournissant le calcul de $E(X_{2009})$ lorsque $b = 10$ et $N = 100$.
 - (e) En utilisant la formule établie en II-2(c), prouver que, pour tout entier naturel n , on a :

$$E(X_n) = b \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n \right).$$

3. Calcul de q_n

- (a) En utilisant une formule des probabilités totales, établir la formule suivante pour tout entier naturel n :

$$Nq_{n+1} = \sum_{k=0}^n (b-k)p_{n,k}.$$

- (b) Pour tout entier naturel n , exprimer alors q_{n+1} en fonction de $E(X_n)$ et en déduire l'expression de q_{n+1} en fonction de n, b, N .

Partie III – Variance de X_n et covariance du couple (X_n, X_{n+1})

1. Calcul du moment d'ordre 2 de X_n

- (a) En utilisant le résultat de la question II-2(a), déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, \min(n-1, b) \rrbracket$, la valeur de $E(X_n(X_n - 1) \mid X_{n-1} = k)$, et en déduire que

$$E(X_n(X_n - 1)) = \left(1 - \frac{2}{N}\right) E(X_{n-1}^2) + \frac{b-a}{N} E(X_{n-1}),$$

puis que

$$E(X_n(X_n - 1)) = \left(1 - \frac{2}{N}\right) E(X_{n-1}(X_{n-1} - 1)) + \frac{2b(b-1)}{N} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right).$$

- (b) À l'aide d'une récurrence, démontrer que la formule suivante est valable pour tout entier naturel n :

$$E(X_n(X_n - 1)) = b(b-1) \left(1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

2. Donner alors la valeur de $V(X_n)$.

3. Covariance du couple (X_n, X_{n+1})

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E(X_n X_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\min(n,b)} k P(X_n = k) E(X_{n+1} \mid X_n = k).$$

- (b) En déduire l'expression de $E(X_{n+1} X_n)$ en fonction de $E(X_n)$ et de $E(X_n^2)$.

- (c) En déduire l'expression de $\text{cov}(X_n, X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$ et $E(X_n^2)$, puis l'égalité

$$\text{cov}(X_n, X_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) V(X_n).$$

- (d) Commenter le signe de $\text{cov}(X_n, X_{n+1})$.

4. Généralisation au calcul de $\text{cov}(X_n, X_{n+\ell})$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\ell \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le résultat de la question II-2(e), justifier que pour tout $k \in \llbracket 0, \min(n, b) \rrbracket$,

$$E(X_{n+\ell} \mid X_n = k) = k + (b-k) \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^\ell\right).$$

- (b) En déduire que $E(X_n X_{n+\ell}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^\ell E(X_n^2) + b \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^\ell\right) E(X_n)$.

- (c) Justifier que $E(X_{n+\ell}) = b + (E(X_n) - b) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^\ell$.

- (d) En déduire que $\text{cov}(X_n, X_{n+\ell}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^\ell V(X_n)$.

Partie IV – Simulation informatique

Écrire une fonction en PASCAL prenant en paramètre les valeurs de a, b et n , et simulant la variable aléatoire X_n définie en début de partie II.