Devoir Surveillé n° 5

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 – Exercice technique

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser (on ne demande pas le calcul de P^{-1} , l'inverse de la matrice de passage).
2. (a) Trouver un polynôme P de degré 2, annulateur de la matrice A .
(b) À l'aide d'une division euclidienne, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A et de la matrice identité I_3 .
3. Justifier que A est inversible, et déterminer son inverse, ainsi qu'une expression de A^{-n} en fonction de A et de I_3 , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 – (d'après ESC 1999)

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en appliquant la règle suivante : si une boule tirée porte le numéro k , avant de procéder au tirage suivant, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k .

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U_n de toutes ses boules. On note pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, N_k le numéro de la boule tirée lors du k -ième tirage, en convenant que N_k prend la valeur 0 si ce tirage n'a pas lieu. On note $S = \sum_{k=1}^n N_k$, la somme des numéros des boules tirées.

On pose par convention $X_0 = 0$.

1. (a) Donner la loi de X_1 , la loi de X_2 et leurs espérances.
(b) Déterminer la loi de X_3 et calculer $E(X_3)$.
2. Soit maintenant n quelconque dans $\mathbb{N}^*$.
(a) Déterminer $X_n(\Omega)$.
(b) Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$
(c) Reconnaître la loi de N_1 , et donner son espérance.

(d) Montrer que

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad P(X_n = k \mid N_1 = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq k - 1 \\ P(X_{i-1} = k - 1) & \text{si } i \geq k. \end{cases}$$

Que valent les probabilités $P(X_n = k \mid N_1 = 1)$, et $P(X_n = 1 \mid N_1 = i)$?

3. (a) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k-1}^{n-1} P(X_i = k - 1)$.
- (b) Calculer $P(X_n = 2)$.
- (c) Soit pour tout $n \geq 2$, $v_n = n!P(X_n = n - 1)$. En calculant $v_{n+1} - v_n$, déterminer $P(X_n = n - 1)$.
4. (a) À l'aide de certains résultats de la question 2, montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$E(X_n \mid N_1 = i) = E(X_{i-1}) + 1$$

(b) En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$E(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1$$

puis que

$$E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}.$$

(c) Donner enfin, pour tout $n \geq 1$, l'expression de $E(X_n)$ sous forme d'une somme.

5. (a) Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'ensemble $N_k(\Omega)$.
- (b) Justifier que, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, et pour tout $i \in \llbracket 2, n - k + 2 \rrbracket$, la loi conditionnelle de N_k sachant $N_{k-1} = i$ est une loi classique. En déduire sans calcul la valeur de $E(N_k \mid N_{k-1} = i)$.
Que vaut $E(N_k \mid N_{k-1} = i)$ lorsque $i = 1$ et lorsque $i = 0$?
- (c) Déduire de la question précédente que pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$E(N_k) = \frac{1}{2}E(N_{k-1}) - \frac{1}{2}P(X_n = k - 1).$$

En remarquant que N_n suit une loi de Bernoulli, déterminer $E(N_n)$ et vérifier que la relation ci-dessus est également vraie pour $k = n + 1$.

(d) En déduire que pour tout $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$,

$$E(N_k) = \frac{1}{2^{k-1}}E(N_1) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-k}P(X_n = j).$$

(e) En déduire que

$$E(2^{X_n}) = n + 1.$$

6. À l'aide des résultats de la question 5, exprimer $E(S)$ en fonction de $E(2^{X_n})$, et montrer enfin que :

$$E(S) = n$$

7. Montrer, en utilisant 5(b) et 5(c), que pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$\text{cov}(N_{k-1}, N_k) = \frac{1}{2}V(N_{k-1}) + \frac{1}{2}(E(N_{k-1}) - 1)P(X_n = k - 1).$$

8. Simulation informatique

- (a) Écrire une procédure en Pascal simulant (lors d'une même succession d'expériences), les deux variables X_n et S (les valeurs obtenues seront sorties en paramètres de la procédure)
- (b) Écrire une fonction calculant une valeur approchée de $E(X_n S)$, de $E(X_n)$ et de $E(S)$, et renvoyant en sortie une valeur approchée de $\text{cov}(X_n, S)$. On fera 10000 expériences.

Problème –

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension finie n , et u un endomorphisme de E . On étudie dans ce problème quelques propriétés liées à des polynômes annulateurs de u . On recherche en particulier à exprimer un polynôme annulateur de degré minimal. Cette recherche passe par l'étude des sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme, qui constituent une généralisation de la notion de sous-espaces propres. Nous montrons au passage quelques propriétés de ces sous-espaces caractéristiques, ainsi que le fait qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur (dans $\mathbb{C}[X]$) à racines simples. Les résultats que nous exposons dans ce problème constituent la première étape vers la réduction de Jordan des endomorphismes, qui est une généralisation de la diagonalisation.

Partie I – La suite des noyaux itérés et les sous-espaces caractéristiques

Dans cette partie, λ désigne une valeur propre de u .

1. Montrer qu'on a une chaîne d'inclusions

$$\text{Ker}((u - \text{id})^0) \subset \text{Ker}((u - \text{id})^1) \subset \dots \subset \text{Ker}((u - \text{id})^k) \subset \text{Ker}((u - \text{id})^{k+1}) \subset \dots$$

2. Montrer qu'il existe un entier k_0 tel que $\text{Ker}((u - \text{id})^{k_0}) = \text{Ker}((u - \text{id})^{k_0+1})$ (on pourra étudier la suite des dimensions).
3. Justifier qu'alors, pour tout $k \geq k_0$, $\text{Ker}((u - \text{id})^k) = \text{Ker}((u - \text{id})^{k_0})$.

On définit n_λ la plus petite valeur possible de k_0 . Ainsi, $\text{Ker}((u - \text{id})^{n_\lambda}) = \text{Ker}((u - \text{id})^{n_\lambda+1})$, et, pour tout $k < n_\lambda$, $\text{Ker}((u - \text{id})^k) \neq \text{Ker}((u - \text{id})^{k+1})$.

On définit le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ par :

$$C_\lambda = \text{Ker}((u - \text{id})^{n_\lambda}).$$

4. Justifier que $C_\lambda \neq \{0\}$, et que C_λ est stable par u .
5. Justifier que $n_\lambda \leq \dim(C_\lambda)$.
6. Que vaut n_λ si u est diagonalisable (considérer une certaine matrice diagonale).

Partie II – Polynôme annulateur de u

On considère P dans $\mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur de u , et μ une racine de P . On peut donc écrire $P = (X - \mu)^k Q$, où Q est un polynôme n'admettant pas μ comme racine (ainsi, k est l'ordre de multiplicité de la racine μ de P).

1. Montrer que si μ n'est pas valeur propre de u , alors Q est un polynôme annulateur de u .
2. Montrer que si μ est valeur propre de u alors $\text{Ker}(u - \text{id})^k \subset \text{Ker}(u - \text{id})^{n_\lambda}$, et en déduire que le polynôme $(X - \mu)^{n_\lambda} Q$ est encore un polynôme annulateur de u .
3. En considérant la famille $(\text{id}, u, \dots, u^{n^2})$, montrer que u admet au moins un polynôme annulateur, puis justifier que $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$ est un polynôme annulateur de u .
4. Montrer que si u est diagonalisable, alors il existe un polynôme annulateur de u dont toutes les racines sont simples, et exprimer ce polynôme en fonction des valeurs propres de u .

Partie III – Expression de E comme somme directe des sous-espaces caractéristiques

1. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sans racine commune. On ne suppose pas dans cette partie que P et Q sont des polynômes annulateurs de u .

(a) Montrer que $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Ker}(Q(u))$ sont stables par u .

Ainsi, u se restreint en un endomorphisme u_1 de $\text{Ker}(P(u))$ et en un endomorphisme u_2 de $\text{Ker}(Q(u))$.

- (b) Justifier que P est un polynôme annulateur de u_1 et que Q est un polynôme annulateur de u_2 .
- (c) En déduire que les racines du polynôme Q ne sont pas des valeurs propres de u_1 , puis, en factorisant Q , montrer que $Q(u_1)$ est un automorphisme de $\text{Ker}(P(u))$.
- (d) Montrer que la somme $\text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u))$ est directe.

2. P et Q sont toujours deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sans racine commune.

- (a) Soit $x \in \text{Ker}((PQ)(u))$. Montrer, en utilisant une des questions précédentes, qu'il existe un unique élément x_1 de $\text{Ker}(P(u))$ tel que

$$Q(u)(x) = Q(u)(x_1).$$

Montrer de même qu'il existe un unique élément x_2 de $\text{Ker}(Q(u))$ tel que

$$P(u)(x) = P(u)(x_2).$$

- (b) Justifier que $x_2 = x - x_1$.
- (c) En déduire que $\text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

3. En utilisant les résultats de la partie II, en déduire que :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} C_\lambda.$$

- 4. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $n_\lambda = 1$.
- 5. (a) Soit u_λ la restriction de u au sous-espace stable C_λ . Montrer qu'il existe v_λ et w_λ deux endomorphismes de C_λ tels que v_λ soit diagonalisable et w_λ soit nilpotent, et tels que $v_\lambda \circ w_\lambda = w_\lambda \circ v_\lambda$.
- (b) En déduire que tout endomorphisme u de E peut s'écrire comme la somme d'un endomorphisme diagonalisable v et d'un endomorphisme nilpotent w tels que $v \circ w = w \circ v$.

Partie IV – Polynôme annulateur minimal de u

- 1. Soit P un polynôme annulateur de u . En utilisant certains résultats de la partie précédente, et la « minimalité » de n_λ , montrer que toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(u)$ est racine de P , de multiplicité au moins égale à n_λ .
- 2. En déduire que tout polynôme annulateur de u est divisible par $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$, et que par conséquent, ce dernier polynôme est un polynôme annulateur de degré minimal.
- 3. Montrer que tout endomorphisme u d'un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) de dimension n admet un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n .
- 4. Montrer, à l'aide de la question 2, que si u admet un polynôme annulateur à racines simples, alors u est diagonalisable.

Ce dernier résultat constitue une réciproque de la question II-4.