Lycée La Bruyère, Versailles — Samedi 28/01/2012
ECS 2 – Mathématiques

Devoir Surveillé n° 6

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés*.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 – (EDHEC 2010)

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.
On pose $Z = |X - Y|$, et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) Déterminer une densité de $-Y$
   (b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :
$$g(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   On note G la fonction de répartition de $X - Y$.
2. (a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z en fonction de G.
   (b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par :
$$h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.
4. Simulation informatique.
   On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction `random` permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1[$.
   Écrire une fonction `Z` simulant la variable aléatoire Z.

Exercice 2 –

On rappelle qu'une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$, et qu'une primitive de $x \mapsto x\ln x$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}$
Soit a un réel, et f la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} a|x| & \text{si } x \in [-1, 3] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

Soit B une variable aléatoire admettant f pour densité. Soit A une variable suivant une loi uniforme sur $]0,1]$ et C une variable suivant une loi uniforme sur $[1,2]$. On suppose que A, B et C sont mutuellement indépendantes. On considère le polynôme aléatoire $AX^2+2BX+C=0$. Le but de cet exercice est de calculer la probabilité que ce polynôme n'admette pas de racine réelle.

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $AC-B^2$ pour que $AX^2+2BX+C$ n'admette pas de racine réelle.
3. Après avoir justifié son existence, calculer $E(AC-B^2)$.
4. Déterminer une densité de $-B^2$.
5. Déterminer une densité de $\ln A+\ln C$.
6. En déduire qu'une densité du produit AC est :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_{AC}(x)=\begin{cases}\ln 2 & \text{si } x\in[0,1]\\ \ln 2-\ln x & \text{si } x\in[1,2]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$
7. On admet que $AC-B^2$ est une variable à densité, dont une densité est notée h. Montrer que pour tout $x\geqslant 0$:
$$h(x)=\begin{cases}\frac{1+\ln 2}{10}-\frac{x\ln 2}{10}+\frac{x}{10}-\frac{(x+1)\ln(x+1)}{10} & \text{si } x\in[0,1],\\ \frac{2}{5}-\frac{(1+\ln 2)x}{5}+\frac{x\ln x}{5} & \text{si } x\in[1,2]\\ 0 & \text{si } x\geqslant 2\end{cases}$$
(on ne demande pas de calculer h sur $\mathbb{R}_-$).
8. Exprimer la probabilité que $AX^2+2BX+C$ n'admette pas de racine à l'aide d'une intégrale portant sur la fonction h, puis calculer cette probabilité.

Exercice 3 – Soit λ et μ deux réels, et M la matrice
$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -\lambda\\ -1 & -\lambda & \mu\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) d'un produit scalaire si et seulement si $\lambda^2-2\lambda+2<\mu$.
2. Pour $\lambda=1$ et $\mu=2$, vérifier que cette condition est satisfaite, et exprimer dans ce cas la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale (pour le produit scalaire donné par la matrice M) sur le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.
3. Soit X une variable suivant une loi exponentielle de paramètre 1, et Y une variable suivant une loi uniforme sur $[0,2]$. On suppose que X et Y sont indépendantes.
   (a) Déterminer une densité de $-X^2+2X-2$
   (b) Déterminer une densité de $-X^2+2X-2+Y$
   (c) Montrer que la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -X\\ -1 & -X & Y\end{pmatrix}$ soit la matrice d'un produit scalaire est égale à
$$\frac{1}{2\mathrm{e}}\int_0^1 (\mathrm{e}^{\sqrt{-(x-1)}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{-(x-1)}})\,\mathrm{d}x,$$
   et calculer cette intégrale, en effectuant le changement de variable $y=\sqrt{-(x-1)}$.

Problème – (inspiré de EML 2007)

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal à 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E.
On rappelle qu'étant donné un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ sur E, on dit qu'un endomorphisme φ de E est symétrique si pour tout x et y de E, on a $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle$, et que dans ce cas, φ est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux.

Partie I – Étude d'un produit scalaire sur E

1. Montrer que l'application : $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2) P(x) Q(x) \, \mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.

On munit dorénavant E de ce produit scalaire, noté $\langle ., . \rangle$.

3. Soit $(Q_0, \dots, Q_n)$ la base orthonormale de E obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $\mathcal{B}$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, Q_k est de degré k, et que son coefficient dominant est positif.

On suppose dans le reste de cette partie que $n = 2$.

3. Déterminer la matrice du produit scalaire dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
4. Déterminer explicitement la base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2)
5. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(1 + X^2)^\perp$.

Partie II – Étude des racines des polynômes Q_j

Dans cette partie, n est de nouveau supposé quelconque supérieur ou égal à 2.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

1. (a) Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j - 1$, on a $\langle S, Q_j \rangle = 0$.
   (b) En considérant $\langle 1, Q_j \rangle$, montrer que Q_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $]-1, 1[$.
   (c) En déduire que Q_j admet au moins, dans l'intervalle $]-1, 1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.
2. On note $\{x_1, \dots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de Q_j appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$ et $S_m = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_m)$.
   (a) Justifier que $m \leqslant j$.
   (b) Montrer que le polynôme $S_m Q_j$ (produit les polynômes S_m et Q_j) garde un signe constant sur l'intervalle $]-1, 1[$.
   (c) En considérant $\langle S_m, Q_j \rangle$, montrer que $m = j$.
   (d) En déduire que Q_j admet j racines simples réelles, toutes situées dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Partie III – Expression des polynômes Q_k comme vecteurs propres d'un certain endomorphisme.

1. Montrer que, pour tout polynôme P de E, le polynôme $((X^2 - 1)P)''$ est élément de E, où $((X^2 - 1)P)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(X^2 - 1)P$.

On note $\varphi : E \to E$ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe $\varphi(P) = ((X^2 - 1)P)''$.

1. Vérifier : $\varphi(1) = 2$, $\varphi(X) = 6X$.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
3. Calculer $\varphi(X^k)$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, et écrire la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$.
4. (a) Montrer que φ admet $n + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes, que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.
   (b) Est-ce que φ est bijectif ?

(c) Montrer que φ est diagonalisable, et déterminer, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, la dimension du sous-espace propre de φ associé à λ_k.

5. Soient $k \in \{0, \ldots, n\}$ et P un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ_k.
   (a) Montrer que le degré du polynôme P est égal à k.
   (b) Montrer que le polynôme Q défini par $Q(X) = P(-X)$ est un vecteur propre associé à λ_k
6. En déduire qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de φ telle que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.
   Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?
7. Calculer P_0, P_1, P_2. Comparer à Q_0, Q_1, Q_2.
8. (a) À l'aide d'intégrations par parties, établir que φ est un endomorphisme symétrique de E.
   (b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E est orthogonale.
   (c) Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathrm{Vect}(P_k) = \mathrm{Vect}(Q_k)$,
   (d) En considérant le coefficient dominant, justifier que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $Q_k = \dfrac{P_k}{\|P_k\|}$.

Partie IV – Une généralisation de la partie II

Soit ℓ un entier **impair** *strictement positif. On considère maintenant $E = \mathbb{R}_{n\ell}[X]$. On note $(R_1, \ldots, R_n)$ la famille orthonormale obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille libre $(1, X^\ell, X^{2\ell}, \ldots, X^{n\ell})$ de E.*
On note pour tout $k \in [\![0, \ell - 1]\!]$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{\ell}}$, les ℓ racines ℓ-ièmes de l'unité.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

1. Montrer que R_j est de degré $j\ell$.
2. (a) Justifier que si un réel non nul x est racine de R_j, alors pour tout $k \in [\![0, \ell - 1]\!]$, $x\omega_k$ est aussi racine de R_j.
   (b) Justifier que si 0 est racine de R_j, elle est racine d'ordre au moins ℓ.
3. Montrer que R_j admet au moins, dans l'intervalle $]-1, 1[$, une racine d'ordre de multiplicité impaire.
4. Soit $\{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de R_j dans l'intervalle $]-1, 1[$.
   (a) Justifier que $m \leqslant j$.
   (b) En considérant $S_m = (X^\ell - x_1^\ell)(X^\ell - x_2^\ell) \ldots (X^\ell - x_m^\ell)$, et en s'inspirant de la partie II, montrer que $m = j$.
   (c) En déduire que les racines non nulles de R_j dans $\mathbb{C}$ sont toutes simples, de module strictement inférieur à 1, et d'argument égal à $\frac{k\pi}{\ell}$, pour un entier k de $[\![0, 2\ell - 1]\!]$, et que si 0 est racine de R_j, alors 0 est racine d'ordre de multipicité ℓ.

On suppose à partir de maintenant que ℓ **est pair***, et on garde les mêmes notations que ci-dessus.*

5. En remarquant que si x est racine de Q_j, $-x$ l'est aussi, montrer que Q_j admet au moins une racine d'ordre impair dans $]0, 1[$ (on pourra justifier que si 0 est racine, sa multiplicité est nécessairement paire).
6. En s'inspirant de l'argument précédent, montrer que toutes les racines complexes de R_j sont simples, et les localiser. Combien R_j admet-il de racines réelles ? 0 peut-il être racine de R_j ?