Concours Blanc 2 – Épreuve de mathématiques (DS 7)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés*.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 – (d'après Ecricome 2010)

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme :

$$f(P) = P'' - 4XP'.$$

1. Étude de f. Soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.
   (a) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Calculer $f(1)$, $f(X)$, puis $f(X^k)$ pour $k \in \{2, \ldots, n\}$.
   Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.
   (c) Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres est de dimension 1.
   (d) Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
   Établir que : $\lambda = -4 \deg P$.
   En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que :

$$(\mathcal{E}_n) : \quad f(H_n) = -4nH_n.$$

   Rappel : *un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.*

2. Étude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) En dérivant la relation $(\mathcal{E}_n)$, démontrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad f(H_n') = -4(n-1)H_n'.$$

   En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad H_n' = nH_{n-1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.$$

   (b) Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$?
   Calculer alors H_2 et H_3.
   (c) D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}.$$

   Écrire un programme en Pascal calculant u_{2010}.

3. Application aux points critiques d'une fonction à trois variables

On note U le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \textit{ tel que } x \neq y \textit{ et } y \neq z \textit{ et } x \neq z\}$$

ainsi que la fonction V définie sur U par :

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x - y| - \ln|y - z| - \ln|z - x|.$$

On rappelle qu'un point critique de V est par définition un point $A \in U$ en lequel le gradient $\nabla V(A)$ de V est égal au vecteur nul.
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$.

   (a) Justifier que $\mathbb{R}^3 \setminus U$ est l'union de 3 sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $\mathbb{R}^3$ est ouvert.

   (b) Établir que (α, β, γ) est un point critique de V si et seulement si (α, β, γ) est solution du système :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2\alpha(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta) & = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) & = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) & = 2\gamma - \alpha - \beta. \end{cases}$$

   (c) On introduit le polynôme $Q(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$.
   Montrer que (α, β, γ) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $Q'' - 4xQ'$ admet pour racines α, β et γ.

   (d) Prouver que si (α, β, γ) est un point critique de V, alors

$$Q'' - 4XQ' = 12Q,$$

   puis que $Q = H_3$ (cf. question 2(b))
   Donner alors les points critiques de V

4. Étude d'un extremum de V. Soit U' le sous- ensemble de U constitué des points (x, y, z) vérifiant $x < y < z$.

   (a) Donner l'unique point critique A de V dans U' (les coordonnées explicites de A ne sont pas nécessaires pour répondre aux questions suivantes)

   (b) Déterminer la matrice hessienne $\nabla^2 V(X)$ en tout point $X = (x, y, z)$ de U'.

   (c) Montrer que pour tout $X \in U'$, et tout $H = \begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix}$, on a :

$${}^tH \cdot \nabla^2 V(X) \cdot H = \frac{(h - k)^2}{(x - y)^2} + \frac{(k - \ell)^2}{(y - z)^2} + \frac{(\ell - h)^2}{(z - x)^2} + 2(h^2 + k^2 + \ell^2).$$

   (d) Après avoir justifié que pour tout $B \in U'$, le segment $[AB]$ est contenu dans U', montrer à l'aide d'une formule de Taylor que V admet au point A un minimum sur U'.

Exercice 2 – Ecricome 2002

On se propose ici d'étudier la série de terme général

$$u_n(x) = a_n x^n$$

où x est un réel quelconque et a_n un réel défini par :

$$a_n = \int_0^1 \left[\frac{1 + t^2}{2}\right]^n \, \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Étude de l'absolue convergence de la série

(a) Prouver que pour tout n entier naturel :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{n+1}.$$

(b) Pour $|x| = 1$, la série de terme général $u_n(x)$ est-elle absolument convergente ?

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante, sur x, pour que la série de terme général $u_n(x)$ soit absolument convergente.

2. Somme de la série pour $-1 \leqslant x < 1$.

On suppose maintenant que $-1 \leqslant x < 1$.

(a) Pour $t \in [0,1]$, montrer que :

$$2 - x - xt^2 \geqslant \frac{3}{2}(1-x).$$

(b) Justifier l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2 \ \mathrm{d}t}{2 - x - xt^2}$.

(c) On pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2 \ \mathrm{d}t}{2 - x - xt^2}.$$

Montrer que pour tous les entiers naturels n :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \right| \leqslant \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}.$$

(d) En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $u_n(x)$.

(e) Donner la valeur de a_0 puis établir la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (2k+3)a_{k+1} = 1 + (k+1)a_k.$$

(f) Écrire en Pascal un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-p} près, le réel x et l'entier p étant supposés donnés.

Problème – (d'après Écricome 2010)

(les questions marquées par une étoile (*) ont été ajoutées)

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient r boules numérotées $1, 2, \ldots, r$. On pioche indéfiniment les boules avec remise, chaque boule pouvant être piochée de façon équiprobable.

Pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note Y_i la variable aléatoire égale au « nombre de pioches nécessaires pour obtenir i boules distinctes ». On convient que $Y_1 = 1$.

On désigne par X_r la variable aléatoire égale au « nombre de pioches nécessaires pour obtenir les r boules numérotées $1, 2, \ldots, r$ ». Il est immédiat que $X_r = Y_r$.

Par exemple, en supposant que $r = 4$, si les boules piochées successivement portent les numéros :

$$3, \quad 3, \quad 3, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 2, \quad 4, \quad 1, \quad \ldots$$

alors on a : $Y_1 = 1$, $Y_2 = 4$, $Y_3 = 8$, $Y_4 = X_4 = 11$.

La partie I établit certaines résultats préliminaires qui seront utilisés dans d'autres parties.

La partie II se consacre à l'étude de la loi des variables discrètes $Y_{i+1} - Y_i$, afin d'en déduire l'espérance et la variance de la variable discrète X_r.

La partie III détermine la loi de la variable X_r, puis étudie la distribution asymptotique de la variable X_r autour de sa moyenne.

On note exp *la fonction exponentielle définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

Partie I – Résultats préliminaires

1. <u>Étude d'une suite.</u>

   On introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par : $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - \ln(n)$.

   (a) Écrire un programme Pascal permettant de calculer u_n pour un entier $n \geqslant 1$ donné.

   (b) À l'aide d'un développement limité, justifier que $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

   En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n - u_{n+1})$ puis démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

   (c) Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge (on ne demande pas le calcul de la limite).

2. <u>Loi de Gumbel</u>

   Soit Z une variable aléatoire continue. On suppose que Z suit la loi de Gumbel, c'est-à-dire que sa fonction de répartition F_Z est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Z(t) = \exp(-\exp(-t)).$$

   (a) Vérifier que la fonction F_Z est bien une fonction de répartition puis que Z possède une densité que l'on précisera.

   (b) On considère la variable aléatoire $W = \exp(-Z)$.

   Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire W.

   En déduire que la variable aléatoire W suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres.

   (c) Pour tout entier k positif, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(x))^k \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ est absolument convergente.

   (d) En justifiant le changement de variable $x = \exp(-t)$, démontrer que la variable Z admet un moment d'ordre k valant :

$$E(Z^k) = \int_0^{+\infty} (-\ln(x))^k \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x.$$

   (e) (*) Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, et indépendante de Z. Déterminer une densité de $-T$, puis une densité de $Z-T$ (on pourra effectuer un changement de variable $u = \mathrm{e}^{-t}$)

Partie II – Étude de la variable X_r

1. <u>Étude du cas $r = 3$</u>

   On suppose uniquement dans cette question que $r = 3$, c'est-à-dire que l'urne ne contient que trois boules numérotées respectivement 1, 2, 3, *chacune pouvant être piochée avec la probabilité* $\frac{1}{3}$.

   (a) Soit n un entier naturel non nul.

   Comparer les événements $(Y_2 > n)$ et C_n : « les n premières pioches fournissent des boules portant toutes le même numéro ».

   Calculer la probabilité $P(C_n)$. En déduire la probabilité $P(Y_2 > n)$ puis donner la loi de la variable Y_2.

   (b) Justifier que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k])$$

   puis que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall k \geqslant 2, \quad P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k]) = \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

   En déduire la loi de la variable $Y_3 - Y_2$.

Dans toute la suite du problème, r désignera un entier supérieur ou égal à 2.

2. Loi de $Y_{i+1} - Y_i$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$.
   (a) Justifier que :
$$Y_i(\Omega) = \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \ldots, i-1\}, \qquad \text{et} \qquad (Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$
   (b) Démontrer que :
$$\forall n \geqslant 1, \;\; \forall k \geqslant i, \;\; P_{(Y_i = k)}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right).$$
   (c) En déduire que $Y_{i+1} - Y_i$ suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres puis établir que :
$$E(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r}{r-i} \qquad \text{et} \qquad V(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{ri}{(r-i)^2}.$$
3. (*) Covariance du couple (Y_i, Y_{i+1}), $i \in [\![1, r-1]\!]$
   (a) En admettant que Y_i et $Y_{i+1} - Y_i$ sont indépendants, exprimer une relation entre $V(Y_i)$, $V(Y_{i+1})$ et $V(Y_{i+1} - Y_i)$
   (b) En déduire que $\operatorname{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = V(Y_i)$.
   (c) Commenter le signe de $\operatorname{cov}(Y_i, Y_{i+1})$.
4. Espérance et variance de X_r
   (a) Justifier que : $X_r = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i})$. En admettant que les variables $Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, \ldots, Y_r - Y_{r-1}$ sont indépendantes, vérifier que :
$$E(X_r) = r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} \qquad \text{et} \qquad V(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} - r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}.$$
   (b) À l'aide de la question I-1, prouver l'existence de deux réels α et β tels que :
$$E(X_r) \underset{r \to +\infty}{=} r\ln(r) + \alpha r + o(r) \qquad \text{et} \qquad V(X_r) \underset{r \to +\infty}{\sim} \beta r^2.$$
5. (*) Simulation informatique
   Écrire une fonction en Pascal, prenant en paramètre les valeurs r et i, et simulant la variable aléatoire Y_i. On pourra utiliser un tableau dont les entrées serviront à coder le fait qu'une boule donnée a déjà été tirée ou non.

Partie III – Loi de X_r et de sa déviation asymptotique par rapport à sa moyenne

Pour tout entier $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ et tout entier naturel $m \geqslant 1$, on considère l'événement $A_{k,m}$: « le numéro k n'a pas été pioché durant les m premières pioches ».

1. Loi de X_r
   Soit m un entier naturel non nul.
   (a) Pour tout entier naturel $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, calculer successivement :
      - la probabilité de l'événement $A_{k,m}$,
      - la probabilité de l'événement « k numéros n'ont pas été piochés au cours des m premières pioches »
   (b) Justifier que :
$$\begin{aligned} P(X_r > m) &= \binom{r}{1}\left(1 - \frac{1}{r}\right)^m - \binom{r}{2}\left(1 - \frac{2}{r}\right)^m + \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r}\left(1 - \frac{r}{r}\right)^m \\ &= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^m \end{aligned}$$

En déduire la loi de X_r.

2. <u>Comportement de X_r au delà de sa moyenne</u>

   (a) À l'aide d'une récurrence sur m, montrer que, pour tout famille $(D_1, \ldots, D_m)$ d'événements, on a :
   $$P(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_m) \leqslant P(D_1) + P(D_2) + \cdots + P(D_m).$$

   (b) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $\exp(x) \geqslant 1 + x$. En déduire que :
   $$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \forall k \in \{1, \ldots, r\}, \quad P(A_{k,m}) \leqslant \exp\left(-\frac{m}{r}\right).$$

   (c) Soit $\varepsilon > 0$, on note M_r la partie entière de $(1+\varepsilon) r \ln(r)$, c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que :
   $$M_r \leqslant (1+\varepsilon) r \ln(r) < M_r + 1.$$
   Comparer les événements « $(X_r > M_r)$ » et « $(X_r > (1+\varepsilon) r \ln(r))$ ».
   En déduire que :
   $$P(X_r > (1+\varepsilon) r \ln(r)) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{r^{\varepsilon}}.$$
   Ainsi, on vient d'établir que :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{r \to +\infty} P(X_r > (1+\varepsilon) r \ln(r)) = 0$$
   qui peut se traduire ainsi : l'événement « X_r est significativement supérieur à sa moyenne » est un événement asymprotiquement rare.

3. <u>Distribution de X_r autour de sa moyenne</u>

   On introduit la suite $(Z_r)_{r \geqslant 2}$ de variables aléatoires définies par :
   $$\forall r \geqslant 2, \quad Z_r = \frac{X_r - r\ln(r)}{r}.$$
   Soit t un réel fixé, on notre m_r la partie entière du réel $r\ln(r) + rt$, c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que :
   $$m_r \leqslant r\ln(r) + rt < m_r + 1.$$

   (a) Justifier l'existence d'un rang $r_0(t)$ tel que :
   $$\forall r \geqslant r_0(t), \ m_r \geqslant 1$$
   puis prouver l'égalité :
   $$\forall r \geqslant r_0(t), \quad P(Z_r > t) = P(X_r > m_r).$$

   (b) Soit k un entier naturel. À l'aide d'un développement limité, établir que :
   $$m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) \underset{r \to +\infty}{=} -k\ln(r) - kt + o(1).$$

   (c) Démontrer que, pour tout entier k, on a : $\displaystyle\binom{r}{k} \underset{r \to +\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}$.
   En déduire que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{r \to +\infty} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \frac{\exp(-kt)}{k!}.$$

   (d) En admettant que l'on a :
   $$\lim_{r \to +\infty} \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\exp(-kt)}{k!},$$
   montrer que la suite de variables aléatoires (Z_r) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Gumbel.
   On rappelle qu'une suite (X_n) converge en loi vers la loi d'une variable aléatoire X de fonction de répartition de classe $\mathcal{C}^1$, si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$