Devoir surveillé 8 – Épreuve EML

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème 1 – (EML 2001)

On note $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
Le but de ce problème est la construction d'une application $f : I \to \mathbb{R}$*, continue et telle que :*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(f(t) + f(t^2)\right) \, \mathrm{d}t.$$

On considère les applications $f_n : I \to \mathbb{R}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$*, définies par* $f_0 = 1$ *(application constante égale à 1) et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(f_n(t) + f_n(t^2)\right) \, \mathrm{d}t.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n$ est une application polynomiale.
   (b) Vérifier que, pour tout $x \in I$, $f_1(x) = 1 + x$ et $f_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{6}$, et calculer $f_3(x)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction continue $|f_n - f_{n-1}|$ admet une borne supérieure sur I. On note :

$$D_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

   (a) (question ajoutée) Justifier sans calcul que cette borne supérieure est en fait un maximum.
   (b) Calculer D_1 et D_2.
   (c) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in I, \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2} D_n.$$

   On pourra étudier séparément les cas $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$.
   (d) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

   (e) Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} D_n$.
   En déduire que, pour tout x fixé, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$ converge.
3. Établir que, pour tout x fixé dans I, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
   On définit ainsi une application $f : I \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.

(a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} M_{n-1}.$$

(b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n \leqslant 2$$

(c) Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (x,y) \in I^2, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant 2|x-y|.$$

5. (a) Établir :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant 2|x-y|.$$

(b) En déduire que f est continue sur I.

6. (a) Établir

$$\forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right).$$

(b) En déduire :

$$\forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

7. En déduire :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(f(t) + f(t^2)\right)\,\mathrm{d}t.$$

8. (question ajoutée)

   (a) Montrer que f est dérivable et exprimer sa dérivée f' en fonction de f.

   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

9. (question ajoutée)

   On suppose défini, dans l'entête d'un programme en Pascal, le type `type polynome = array[0..Nmax] of real;` Nmax étant une constante suffisamment grande pour mener les calculs qui suivent. Un polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$ est alors représenté par le tableau $[a_0, a_1, \ldots, a_d, 0, \ldots, 0]$, de type `polynome`

   Écrire les procédures ou fonctions suivantes en Pascal (elles peuvent s'appeler les unes les autres) :

   (a) la procédure `Ptcarre` prenant en paramètre un polynôme P et calculant dans un second paramètre Q le polynôme $P(X^2)$;

   (b) une procédure `primitive` prenant en paramètre un polynôme P et calculant dans un second paramètre Q la primitive s'annulant en 0 du polynôme P ;

   (c) une procédure `recurrence` prenant en paramètre un polynôme P, et calculant dans un second paramètre Q le polynôme défini par

$$Q(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(P(t) + P(t^2)\right)\,\mathrm{d}t;$$

   (d) une procédure `F` prenant en paramètre un réel e, et calculant dans un paramètre `approxf` un polynôme P donnant une approximation ponctuelle de la fonction f à la marge d'erreur e près sur I, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x \in I, \quad |P(x) - f(x)| \leqslant e.$$

   (e) une fonction `Fx` prenant en paramètre un réel x et un réel e, et calculant la valeur de $f(x)$ à la marge d'erreur e près.

Problème 2 – (EML 2009)

Notations et définitions

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- *La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée 0_n.*
- *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est nilpotente s'il existe un entier naturel non nul p tel que $M^p = 0_n$.*
- *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre réelle de M. On note* $\mathrm{SEP}(M, \lambda)$ *le sous-espace propre de M associé à λ.*
- *On dit qu'une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsqu'elle est symétrique et vérifie :*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXSX \geqslant 0.$$

- *Soient $A, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que R est une racine carrée de A lorsqu'elle vérifie $R^2 = A$.*

Le but de ce problème est d'étudier la notion de racine carrée d'une matrice dans quelques cas particuliers.

Partie I – Deux exemples

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$, et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.
   Calculer $(R_\theta)^2$ et en déduire que la matrice I_2 admet une infinité de racines carrées.
2. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Partie II – Racines carrées d'une matrice de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente

1. Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $t \mapsto \sqrt{1+t}$.
   On note $\sqrt{1+t} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + o_{t \to 0}(t^3)$ ce développement limité.
2. Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X).$$
3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N^4 = 0$. Déduire de la question précédente une racine carrée de $I_n + N$.

Partie III – Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes.

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.
   (a) Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.
   (b) En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
   (c) Justifier que f est diagonalisable.
   Montrer que, pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, la matrice associée à g relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.
   (a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
   (b) Donner un exemple de racine carrée de A. (On l'exprimera à l'aide de P est des éléments diagonaux de D)

(c) Soit R une racine carrée de A. Vérifier que $AR = RA$.
En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

(d) Établir que A admet exactement 2^n racines carrées.

Partie IV – Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive.

1. Montrer que toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.
2. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}SP$ soit diagonale.
3. Déterminer une racine carrée de S qui soit symétrique positive. (On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D.)
4. On veut montrer que S admet une unique racine carrée symétrique positive.
   Soit R une matrice symétrique positive telle que $R^2 = S$.

   (a) Soit λ une valeur propre de R. Montrer que λ^2 est valeur propre de S et que les sous-espaces propres associés vérifient :
   $$\mathrm{SEP}(R, \lambda) \subset \mathrm{SEP}(S, \lambda^2).$$

   On note p le nombre de valeurs propres deux à deux distinctes de R et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les p valeurs porpres deux à deux distinctes de R.

   (b) Justifier : $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(S, \lambda_i^2)$.

   (c) En déduire : $\displaystyle n = \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{SEP}(R, \lambda_i)) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{SEP}(S, \lambda_i^2)) \leqslant n$

   (d) Montrer que $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_p^2$ sont les seules valeurs propres de S et que :
   $$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \quad \mathrm{SEP}(R, \lambda_i) = \mathrm{SEP}(S, \lambda_i^2).$$

   (e) Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

   (f) En déduire que S admet une unique racine carrée symétrique positive.