

6. Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}$. On pourra commencer par effectuer un changement de variables $u = \tan x$.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high, covering the entire area of the page.

Probabilités

7. Définition d'une loi de Poisson de paramètre λ . Donner sans calcul son espérance et sa variance.

[illegible]

8. Énoncer la formule des probabilités composées.

[illegible]

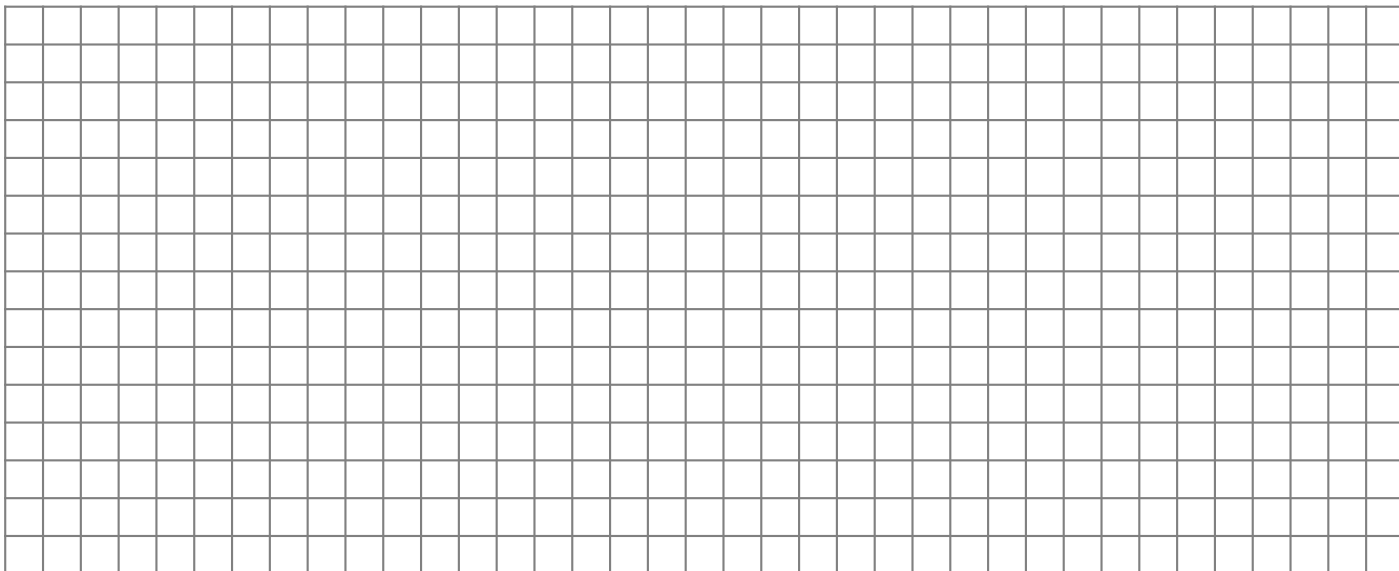
9. Définition et condition d'existence de l'espérance et de la variance.

[illegible]

10. On effectue une première série de lancers d'une pièce équilibrée, et on note N le rang du premier Pile obtenu. On effectue alors une seconde série de N lancers, et on note X le nombre de Pile obtenus lors de cette série.

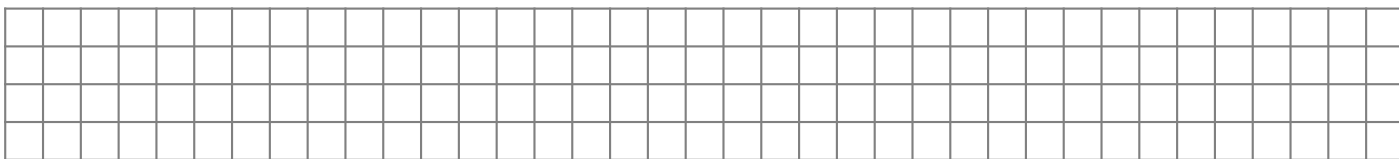
- Déterminer la loi, l'espérance et la variance de N .
- Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{N=n}(X = k)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$.
- Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X .

A full-page sheet of white graph paper featuring a uniform grid of thin gray lines forming small squares. The grid covers the entire area of the page, leaving no margins or additional markings.

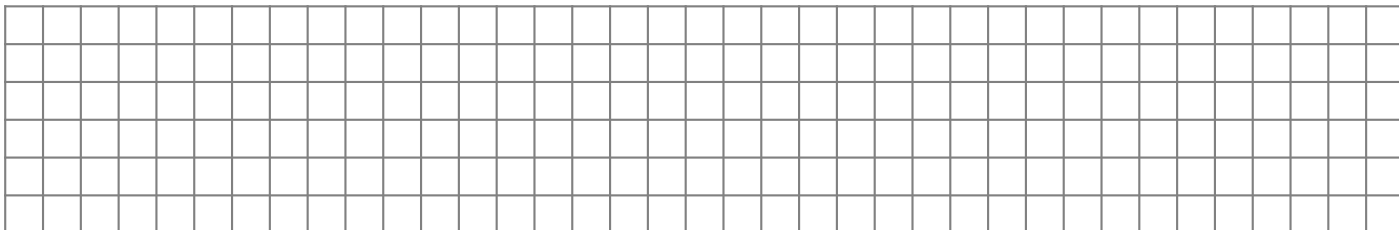


Algèbre

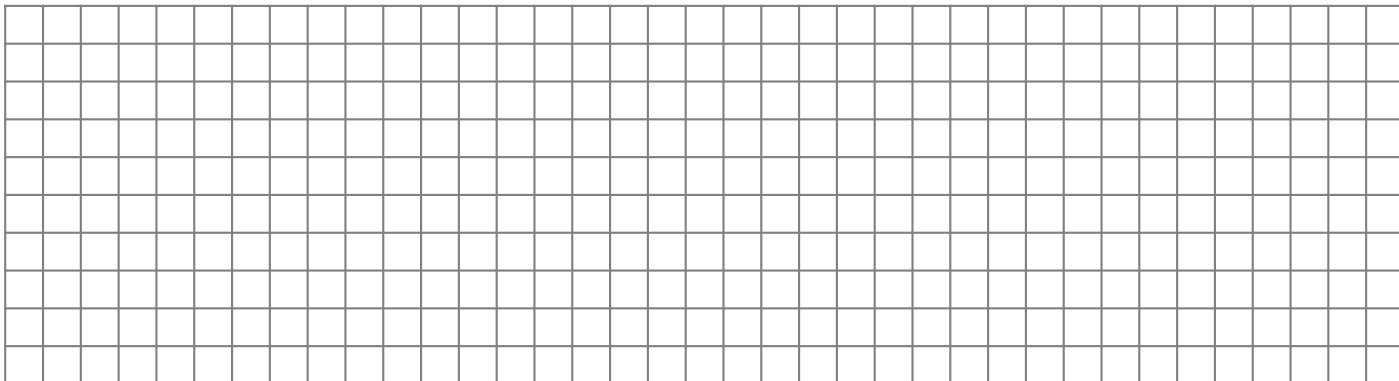
11. Caractérisation de la multiplicité d'une racine d'un polynôme à l'aide de la dérivation.



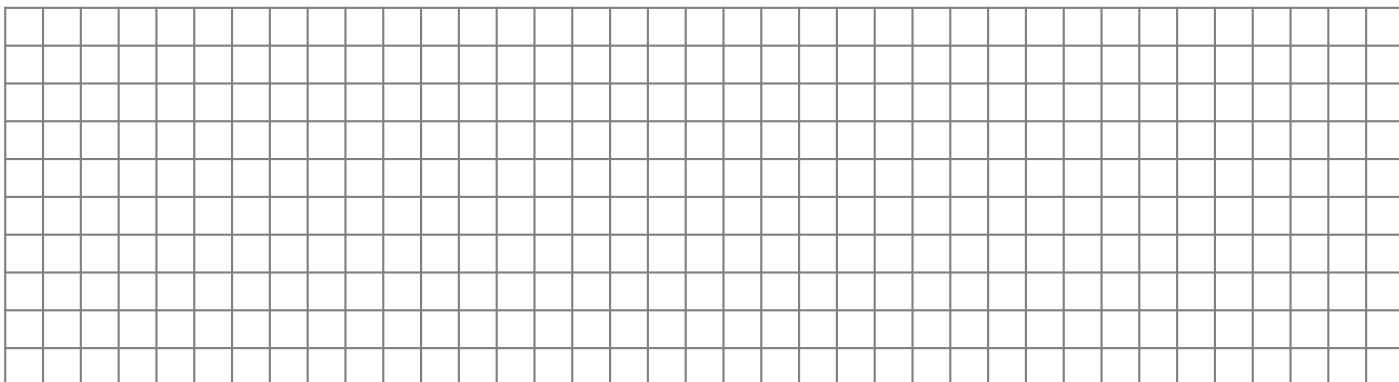
12. Soit $E_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$. Montrer que E_n n'admet pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

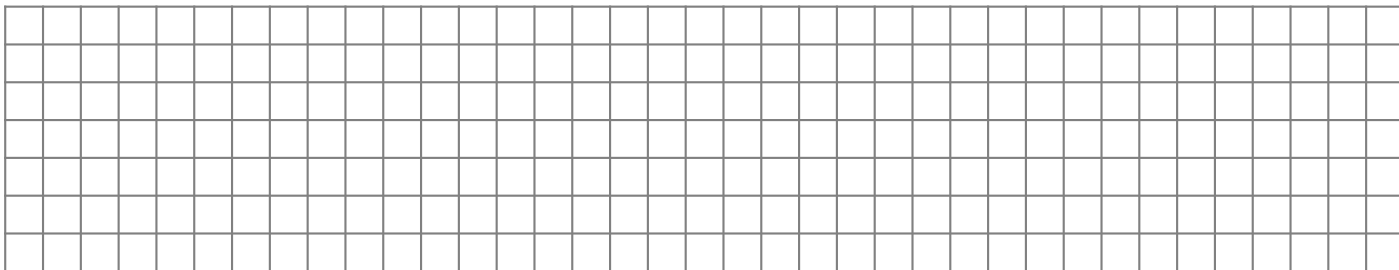


13. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et (e_1, e_2, e_3) une famille libre de E . La famille $(e_1 + 3e_2 + 2e_3, e_2 + 2e_3, 2e_1 + 5e_2 + 2e_3)$ est-elle libre?

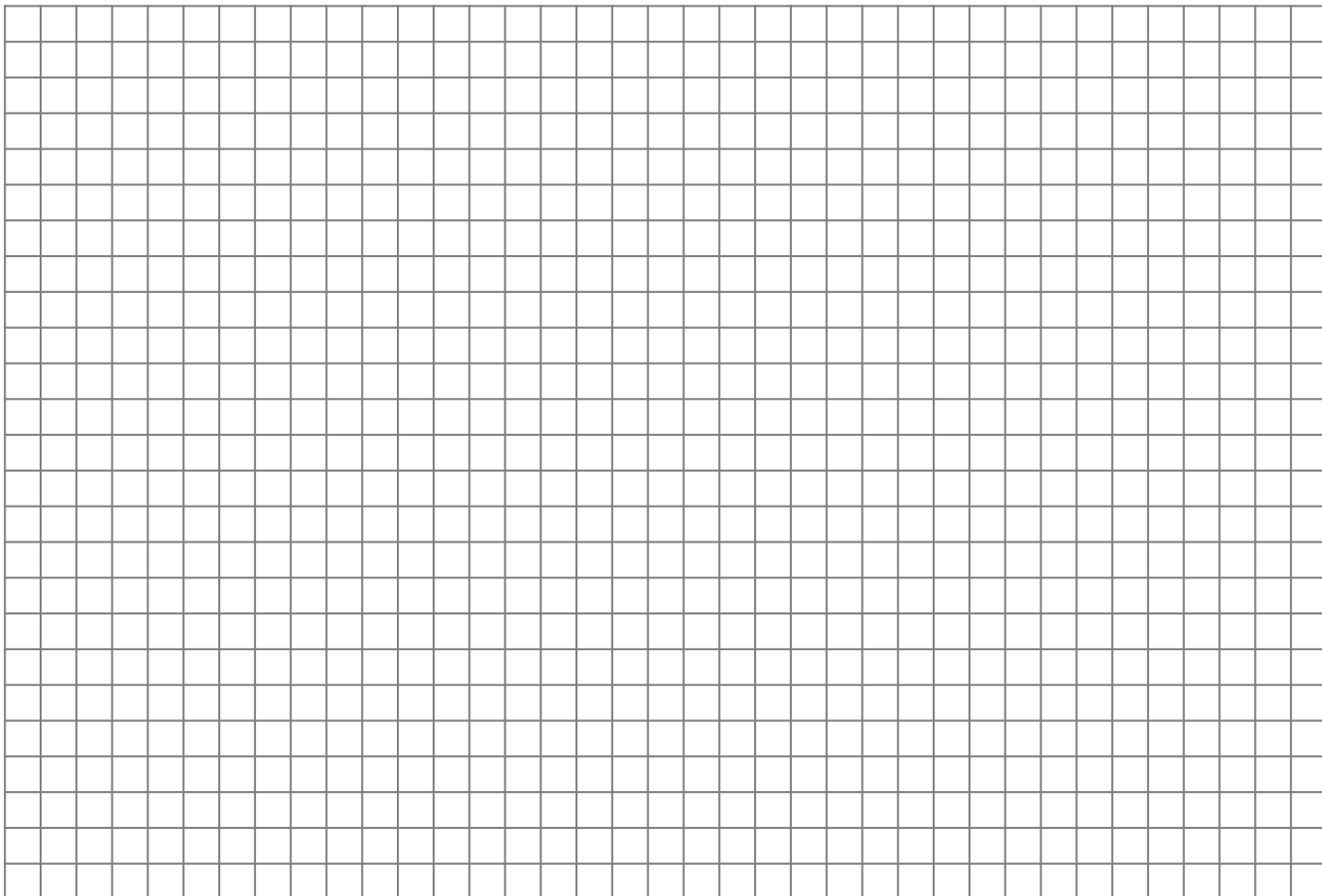


14. La matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse.





15. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de calculer P^{-1})



Programmation

15. Écrire un programme calculant et affichant le n -ième terme de la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+2} = \sin u_k + 2 \cos u_{k+1}$.

