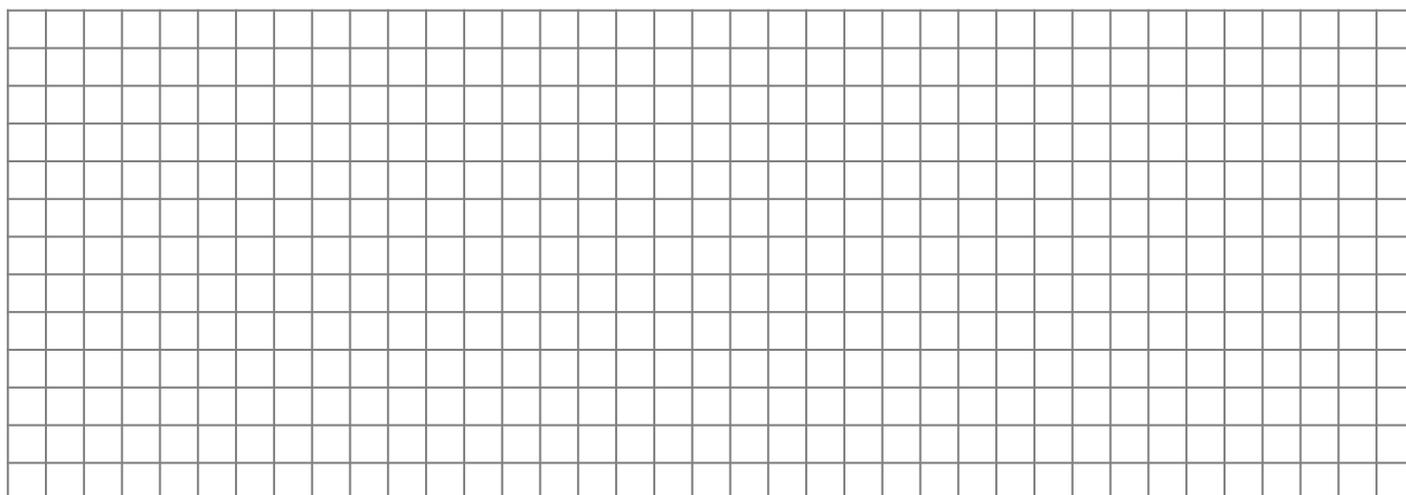


Interrogation n° 2 – Séries, DL, intégrales impropres

Note sur 40 :	Observations :
Note sur 20 :	
Rang :	

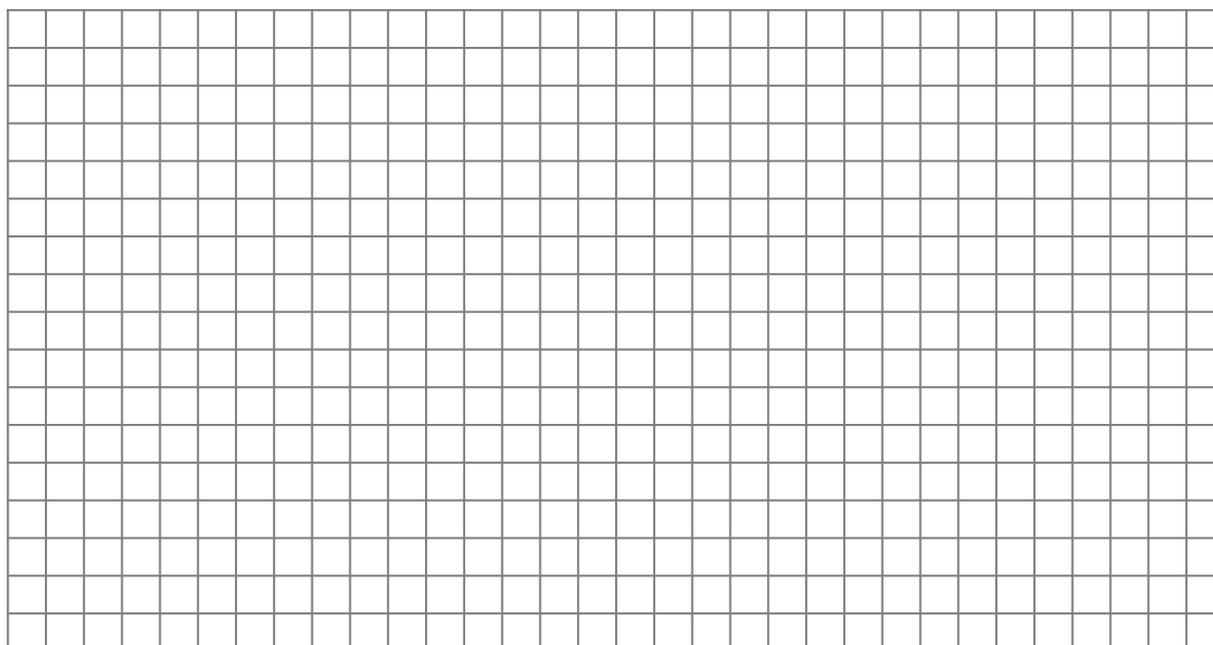
1. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \ln \left(\cos \frac{1}{x^\alpha} \right) dx \quad (\alpha > 0) \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x+2}} dx.$$

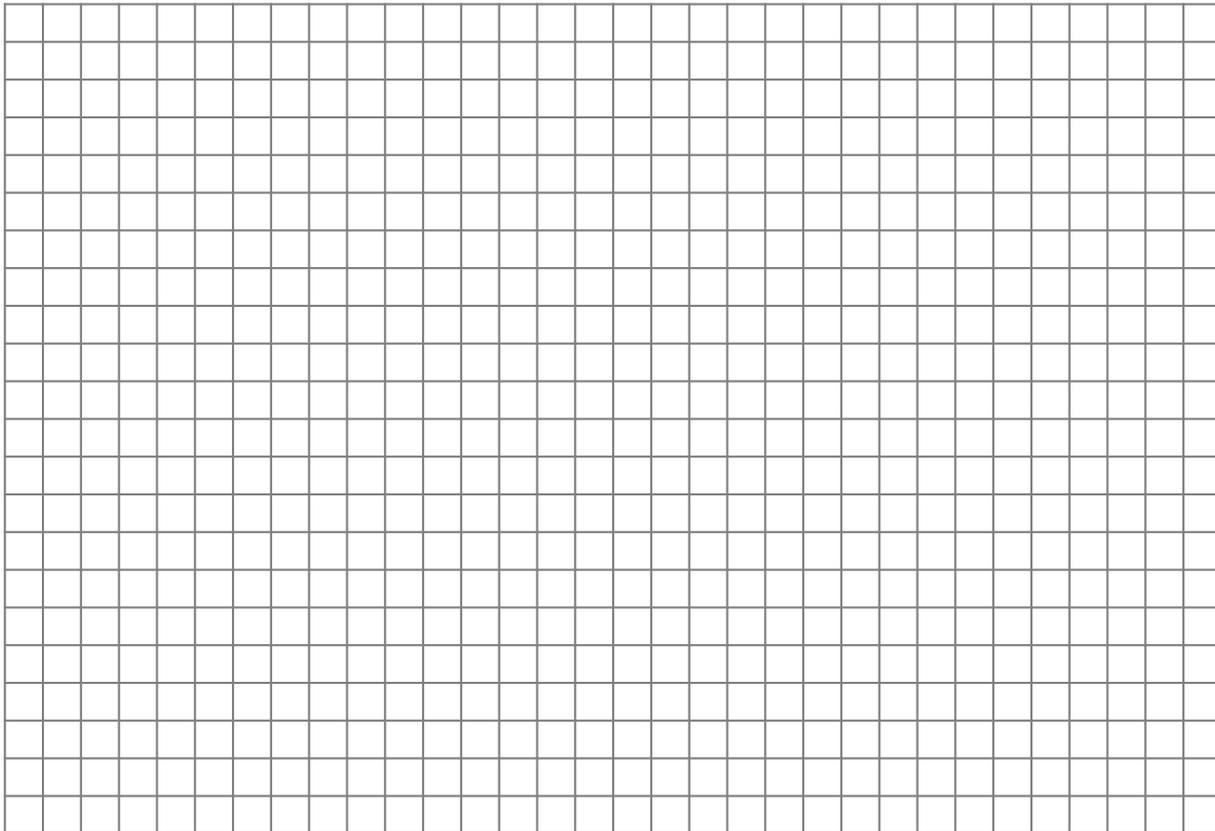


2. Après avoir justifié leur convergence, calculer les intégrales suivantes :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x^2+1)} \quad \text{et} \quad I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Arctan } x}{x^2+1} dx.$$



3. Effectuer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{4}e^{\sin x}\right)$



4. (a) Montrer que $\text{Arctan } x \underset{0}{\sim} x$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\text{Arctan } x \leq x$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan } x}{x}\right)^n dx$ est convergente.

(c) Étudier les variations de la suite $(J_n)_{n \geq 2}$, et en déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n J_n$.

