Nom : Prénom :

Interrogation n° 2 – Séries, DL, intégrales impropres

Note sur 40 :	Observations :
Note sur 20 :	
Rang :	

1. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x^\alpha}\right)\,\mathrm{d}x \ (\alpha > 0) \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x.$$

2. Après avoir justifié leur convergence, calculer les intégrales suivantes :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x^2+1)} \qquad \text{et} \qquad I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

3. Effectuer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{4}e^{\sin x}\right)$

4. (a) Montrer que $\operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim} x$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{Arctan} x \leqslant x$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right)^n \mathrm{d}x$ est convergente.

   (c) Étudier les variations de la suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$, et en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n J_n$.