Interrogation n° 6 – Algèbre bilinéaire, variables à densité

Exercice 1 – Soit a un réel, et soit f la fonction définie sur $]-1,3]$ par $f(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x+1}}$, et nulle sinon.

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité. On note par la suite X une variable aléatoire de densité égale à f.
2. Après avoir justifié leur existence, calculer $E(X)$ et $V(X)$ (on pourra commencer par calculer $E(X+1)$).
3. Déterminer une densité de e^X
4. Déterminer une densité de X^2.

Exercice 2 –

1. Montrer que $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^\pi P(x)Q(x)\sin x \,\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ de ce produit scalaire que l'on notera indifféremment φ ou $\langle .,. \rangle$. Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est
$$\mathrm{Mat}_{bc}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & \pi & \pi^2-4 \\ \pi & \pi^2-4 & \pi^3-6\pi \\ \pi^2-4 & \pi^3-6\pi & \pi^4-12\pi^2+48. \end{pmatrix}.$$
3. Déterminer une base orthonormale (f_1, f_2) de $\mathrm{Vect}(1, X)$
4. Déterminer la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de la projection orthogonale p sur $\mathrm{Vect}(1, X)$.
5. Compléter (f_1, f_2) en une base <u>orthogonale</u> (f_1, f_2, u_3) de $\mathbb{R}_2[X]$, et en déduire sans autre calcul l'expression d'une matrice P telle que
$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$