Probabilités 1 – Probabilités générales : révisions

Exercice 1 – J'ai des disques de n compositeurs. Je suppose que lorsque j'écoute un disque d'un compositeur donné, la probabilité que j'écoute un disque du même compositeur ensuite est $\frac{1}{2}$. La probabilité que j'écoute un disque d'un autre quelconque des compositeurs qui ornent ma CD-thèque est de $\frac{1}{2(n-1)}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le premier disque que j'écoute est de Bach. Probabilité que les k premiers disques écoutés soient de Bach.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le premier disque écouté est quelconque. Probabilité que les k premiers disques soient de compositeurs tous différents.
3. Le k-ième disque que j'écoute est de Bach.
   (a) Probabilité que le $(k-1)$-ième ait aussi été de Bach.
   (b) Probabilité que les $(k-2)$- et $(k-1)$-ièmes ait été de Bach.
   (c) Probabilité que le $(k-2)$-ième ait été de Bach.

Exercice 2 – Deux joueurs A et B jouent avec une probabilité p que A gagne et $1-p$ que B gagne. Celui qui perd donne un euro au gagnant. Ils répètent ce jeu jusqu'à ce qu'un des deux joueurs soit ruiné. Leurs capitaux initiaux respectifs sont a et b. Quelle est la probabilité que A soit ruiné ? Limite lorsque b tend vers $+\infty$ et commentaire. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

Exercice 3 – Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On en tire successivement n, avec remise. Quelle est la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit pair ?

Exercice 4 –

1. Montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles de la forme $]a, b[$.
2. Même question avec les intervalles $]-\infty, a[$.

Exercice 5 – Dans une usine, un service contrôle les colis destinés à la livraison. Ce contrôle est effectué par 2 personnes, qui detectent chacun un colis non conforme dans 90% des cas. Leur travail est indépendant. De plus, 5% des colis sont non conformes.

1. Probabilité qu'un colis pris au hasard soit non conforme et non détecté.
2. Probabilité qu'un colis pris au hasard soit non conforme et détecté.
3. Un lot de 100 colis se présente au contrôle.
   (a) Probabilité que les 100 colis soient conformes.
   (b) Probabilité que les 100 colis soient déclarés bons.
   (c) Probabilité que tous les colis non conformes soient détectés.
   (d) Probabilité qu'un colis non conforme échappe à la vigilance des contrôleurs
   (e) Probabilité que seuls 95 colis passent avec succès le contrôle.

Exercice 6 – Soit $n \geqslant 1$. La probabilité qu'une famille ait exactement n enfants est $p_n = \alpha p^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $p \in]0, 1[$.

1. Montrer que $1 + \alpha \leqslant \frac{1}{p}$.
2. En supposant que les distributions de sexes sont équiprobables dans une fratrie, calculer la probabilité qu'une famille ait exactement S garçons.

Exercice 7 – **(ESCP 2010)**
Pour tout $(p,N)\in\mathbb{N}^2$, on définit la fonction $f_{p,N}$ sur $]-1,1[$ par :

$$f_{0,N}(x)=\frac{x^N}{1-x} \qquad \text{et} \qquad f_{p+1,N}(x)=\int_0^x f_{p,N}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_p de degré inférieur ou égal à $p-1$ tel que pour tout x de $]-1,1[$:
$$f_{p,0}(x)=-\frac{(x-1)^{p-1}}{(p-1)!}\ln(1-x)+P_p(x).$$
   (b) Montrer que, pour tous p et N de $\mathbb{N}$ et tout $x\in]-1,1[$, on a :
$$|f_{p,N}|\leqslant\frac{|x|^{p+N}}{1-|x|}.$$
   (c) Montrer que, pour tous p et N de $\mathbb{N}$ et tout $x\in]-1,1[$, on a :
$$\sum_{n=0}^{N}\frac{n!x^{n+p}}{(n+p)!}=f_{p,0}(x)-f_{p,N+1}(x).$$
   (d) Pour tout $x\in]-1,1[$ et tout $p\in\mathbb{N}$, montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!x^{n+1}}{(n+p)!}$ et exprimer sa somme en fonction de $f_{p,0}(x)$.
2. On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche, d'un stock infini de boules rouges et on joue indéfiniment avec une pièce de monnaie non truquée selon le protocole suivant :
   - Si on obtient « Face » au n-ième lancer ($n\geqslant 1$), on ajoute u_n boules rouges au contenu de l'urne avant le lancer suivant de la pièce.
   - La première fois que l'on obtient « Pile », on tire au hasard une boule de l'urne et le jeu s'arrête alors.

   Calculer la probabilité r d'obtenir la boule blanche dans les cas suivants :
   (a) La suite $(u_n)_n$ est la suite nulle.
   (b) La suite $(u_n)_n$ est la suite constante égale à 1.
   (c) La suite $(u_n)_n$ est définie par $u_n=n+1$.
3. On procède de même, mais la règle est maintenant la suivante :
   - Si on obtient « Face » au n-ième lancer ($n\geqslant 1$), on lance une boule rouge en direction de l'urne et on a à chaque fois une chance sur deux pour que cette boule tombe dans l'urne, indépendamment de ce qui a pu se produire avant, puis on effectue le lancer suivant de la pièce
   - La première fois que l'on obtient « Pile », on tire au hasard une boule de l'urne et le jeu s'arrête alors.
     (a) Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer la probabilité que l'on obtienne n « Face » avant le premier « Pile » et que l'on obtienne alors la boule blanche.
     (b) En déduire la probabilité r d'obtenir la boule blanche.

Exercice 8 – On choisit au hasard deux sous-ensembles de E (avec équiprobabilité). Calculer la probabilité que :

1. $A\cup B$ soit un singleton.
2. $A\cup B=E$.
3. $A\cap B$ soit un singleton.
4. $A\subset B$.

Exercice 9 – On lance 5 dés. À l'issue du premier lancer, on reprend les dés qui n'ont pas amené l'as et on les relance. On répète l'opération le nombre de fois qu'il faut pour obtenir 5 as.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir les 5 as en au plus 2 lancers ? 3 lancers ? n lancers ?
   Indication : Raisonner dé par dé.
2. Quelle est la probabilité qu'on obtienne les 5 as en n lancers exactement ?
3. Quelle est la probabilité que le nombre total de dés jetés soit égal à m ?
   Indication : À chaque lancer d'un nombre n de dés, lancer les dés les uns après les autres. Considérer la succession de tous les lancers.

Exercice 10 – (QC HEC 2009) Un enfant a dans chacune des deux poches de son blouson, un paquet contenant N bonbons. A chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité p, sa poche de gauche pour un prendre un.

1. Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$.

Exercice 11 – (QC ESCP 2010)
Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que 2 événements A et B soient indépendants est que :

$$P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \times P(A \cap \overline{B}).$$

Exercice 12 –

1. *On tire à Pile ou Face à l'aide d'une pièce équilibrée autant de fois qu'il faut pour obtenir Pile, les tirages successifs étant mutuellement indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement :*
   A_n : « le premier Pile est apparu au n-ième tirage. »
   (a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de A_n.
   (b) Montrer que la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet. Est-ce un système complet ?
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire n fois dans cette urne, chaque tirage étant uniforme sur l'ensemble des boules présentes dans l'urne, avec la modalité suivante :*
   - *si on tire une boule noire, on la remet dans l'urne,*
   - *si on tire une boule blanche, on ne la remet pas dans l'urne.*

   On définit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ l'événement B_i : « la i-ème boule tirée est blanche. »
   On définit B l'événement : « on tire exactement une boule blanche lors des n tirages »
   (a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la probabilité de l'événement $\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{j-1}} \cap B_j \cap \overline{B_{j+1}} \cap \cdots \cap \overline{B_n}$.
   (b) En déduire la probabilité de B
3. *On effectue maintenant l'expérience suivante : on tire à Pile ou Face avec une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pour la première fois Pile. On note n le nombre de tirages qu'il a fallu, et on effectue le tirage de la question 2 avec cette valeur de n.*
   (a) Quelle est la probabilité de tirer exactement une boule blanche ?
   (b) On tire exactement une boule blanche. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu Pile au premier lancer ?

Exercice 13 – Deux joueurs A et B tirent sur une cible. La probabilité que A atteigne la cible est $\frac{1}{4}$, et pour B, elle est de $\frac{1}{3}$. Les différents tirs sont indépendants les uns des autres.

1. A et B tirent chacun deux fois. Probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois ?
2. A et B tirent chacun une fois, la cible est atteinte une et une seule fois. Probabilité que ce soit par A ?

Exercice 14 – On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche. On tire à pile ou face autant de fois que nécessaire : tant qu'on obtient face, on ajoute une boule noire dans l'urne. La première fois qu'on obtient pile, on tire une boule dans l'urne et l'expérience s'arrête. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?

Exercice 15 – On lance n dés. Soit A_n l'événement : le total des numéros est pair. Probabilité de A_n ?

Exercice 16 – On se déplace sur les 4 sommets A, B, C et D d'un carré, AB étant horizontal. Au pas 0, on est en A. À chaque étape, on peut aller sur un sommet adjacent à celui sur lequel on se trouve, ou sur le sommet opposé. Les déplacements verticaux ont une probabilité p de se produire, les déplacements horizontaux une probabilité q, et les déplacement en diagonale, une probabilité r (avec $p+q+r=1$)
Déterminer la probabilité de se retrouver en A, B, C ou D au n-ième pas.

Exercice 17 – On se déplace sur les 5 sommets A, B, C, D et E d'un pentagone. Au pas 0, on est en A. À chaque étape, on peut aller sur un sommet adjacent à celui sur lequel on se trouve. Les déplacements dans le sens trigonométrique ont une probabilité p de se produire, les déplacements dans le sens anti-trigonométrique une probabilité q (avec $p+q=1$).
Déterminer la probabilité de se retrouver en A, B, C, D ou E au n-ième pas.

Exercice 18 – Supposons A indépendant de $B \cup C$ et de $B \cap C$, B indépendant de $C \cap A$ et C indépendant de $A \cap B$. On suppose de plus que les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ sont non nulles. Montrer que A, B et C sont mutuellement indépendantes.

Exercice 19 – Le problème du chevalier de Méré – On jette un dé n fois de suite.

1. Quelle est la probabilité p_n qu'on obtienne au moins un 6 ? Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant \frac{1}{2}$?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux fois 6 en n tirages ?
3. On jette deux dés n fois de suite. Quelle est la probabilité p'_n d'obtenir au moins un double 6 ?
4. Comparer p'_{24} et p_4.

Exercice 20 – Le problème du tournoi
Un nombre infini dénombrable de joueurs s'affronte à pile ou face (les pièces étant équilibrées. Les joueurs sont numérotés $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Le protocole du jeu est le suivant :
   - A_1 et A_2 s'affrontent en premier, en trois manches. Si A_1 gagne trois fois, il est déclaré vainqueur du tournoi, sinon A_2 joue avec A_3 (y compris si A_2 a gagné trois fois contre A_1).
   - On procède de même : si A_2 gagne trois fois de suite contre A_3, il est déclaré vainqueur du tournoi, sinon, A_3 joue contre A_4,
   - et ainsi de suite.

   (a) Calculer la probabilité p_1 que A_1 gagne, la probabilité p_2 que A_2 gagne.

   (b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la probabilité que A_n gagne. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de p_n.

   (c) Écrire un programme Pascal demandant n et calculant $\sum_{k=1}^{n} p_k$, sans utiliser de formule.

   (d) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur ?

2. Le protocole est maintenant le suivant.
   - A_1 et A_2 ne s'affrontent qu'une fois,
   - Le vainqueur joue contre A_3,
   - Le vainqueur de ce duel joue contre A_4,
   - et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un joueur gagne trois fois de suite. Ce joueur est décalé gagnant.

   Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, q_n la probabilité que A_n gagne le tournoi.

   (a) Calculer q_1, q_2, q_3, q_4, q_5.

   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 5$, $q_n = \dfrac{1}{8}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-3} q_i\right)$.

   (c) En déduire une relation linéaire d'ordre 3 satisfaite par $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, permettant de calculer q_n à partir du rang 6.

   (d) Sans déterminer explicitement $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, écrire un programme Pascal demandant n et calculant q_n.

   (e) Quelle est la probabilité q_n que A_n gagne le tournoi ?

   (f) Quelle est la probabilité qu'aucun joueur ne soit déclaré vainqueur ?