**Probabilités 2 – Variables aléatoires réelles discrètes : révisions**

**Exercice 1** – (Oral E.S.C.P.) – Soit $X$ une v.a.r. de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Chaque résultat de $X$ est affiché sur un compteur détraqué : si $X$ n'est pas nul, le compteur affiche la bonne valeur ; si $X$ est nul, il affiche au hasard une valeur entre 1 et $n$. On note $Y$ la variable aléatoire égale au nombre affiché.

1. Déterminer la loi de $Y$ et son espérance.
2. Montrer, sans calcul, que $E(Y) \geqslant E(X)$.

**Exercice 2 – (Oral HEC)** – Le nombre de visiteurs quotidiens d'un parc d'attraction suit une loi de Poisson de paramètre 10000. Ce parc a dix entrées $E_1, \ldots, E_{10}$ qui sont équiprobables.

1. Déterminer le nombre moyen de visiteurs en une journée
2. On désigne par $X_1$ le nombre de visiteurs entrant par $E_1$ en une journée donnée. Déterminer la loi de $X_1$, et en déduire son espérance et sa variance.
3. Sachant qu'un visiteur sur 10 se débrouille pour entrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs qui payent et entrent par $E_1$ par jour.

**Exercice 3** – Un ascenseur dessert $n$ étages d'un immeuble. À chaque voyage, le nombre de personnes qui montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée est une v.a.r., notée $X$, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. On émet les hypothèses suivantes :

- Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez-de-chaussée.
- Chaque personne choisit son étage au hasard et indépendamment des autres passagers. Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur.

On note $S$ le nombre d'arrêts de l'ascenseur lors d'un voyage donné (on ne compte pas l'arrêt initial au rez-de-chaussée)

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in [\![1, n]\!]$. Montrer que :
$$P(S = j \mid X = k+1) = \frac{j}{n} P(S = j \mid X = k) + \frac{n-j+1}{n} P(S = j-1 \mid X = k).$$
2. Après avoir justifié l'existence des espérances conditionnelles, montrer que
$$E(S \mid X = k+1) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(S \mid X = k).$$
3. Déterminer, pour tout entier naturel $k$, l'espérance de $S$ sachant que $X = k$.
4. En déduire que $E(S) = n\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}}\right)$

**Exercice 4** – Deux joueurs $A$ et $B$ s'affrontent selon les modalités suivantes : Un des deux joueurs lance une pièce déséquilibrée (la probabilité d'obtenir Pile étant un certain réel $p \in ]0,1[$) jusqu'à obtenir Pile pour la première fois. Notant $r$ le nombre de tirages nécessaires, les joueurs lancent alternativement la pièce, en commençant par le joueur $B$. Le joueur qui obtient le $r$-ième Pile de cette deuxième série de lancers donne $k$ euros à l'autre joueur, $k$ étant le nombre de tirages ayant été nécessaires pour obtenir le $r$-ième Pile lors de cette deuxième série de lancers. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le premier Pile dans la première phase du jeu. On note $Y$ le gain du joueur $A$ à l'issue de la partie, éventuellement négatif si $A$ a perdu.

1. Déterminer la loi de $X$. Quelle est son espérance et sa variance ?
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer la loi de $|Y|$ conditionnée à l'événement $[X = r]$, puis celle de $Y$.
   (b) Déterminer l'espérance de $|Y|$ sachant $[X = r]$.
   (c) Déterminer l'espérance de $Y$ sachant $[X = r]$.
3. En déduire l'existence et la valeur de $E(Y)$.

**Exercice 5** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire sans remise dans une urne contenant $n$ boules noires, et $n$ boules blanches, jusqu'à obtention de toutes les boules noires. $X$ est la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires. Loi et espérance de $X$ ?

**Exercice 6** – Une urne contient 1 boule blanche et 2 boules noires. On tire successivement des boules dans cette urne, avec remise si on tire la boule blanche, et sans remise si on tire une boule noire. Soit $X$ le rang du tirage de la première boule noire, $Y$ le rang de tirage de la seconde boule noire. On note $X = 0$ si on ne tire jamais de boule noire, on note $Y = 0$ si on ne tire jamais la 2e boule noire.

1. Déterminer la loi de $X$, son espérance et sa variance.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la probabilité de $[Y = n]$, et justifier que l'événement $[Y = 0]$ est quasi-impossible.
3. Calculer l'espérance et la variance de $Y$.

**Exercice 7** – On effectue une première série de lancers d'une pièce équilibrée, et on note $N$ le rang du premier Pile obtenu. On effectue alors une seconde série de $N$ lancers, et on note $X$ le nombre de Pile obtenus lors de cette série.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $N$.
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 8** – Soit $X$ une v.a.r. suivant la loi $\mathcal{J}(1,p)$, c'est-à-dire $X + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On pose $Y = \min(X, m)$.

1. Quelles valeurs prend $Y$ ?
2. Donner la loi de $Y$.
3. Calculer l'espérance et la variance de $Y$.

**Exercice 9** – Soit $X$ une v.a.r. prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tout entier naturel $n$, on a $4(X = n + 2) = 5P(X = n + 1) - P(X = n)$. Montrer que $X$ suit une loi classique que l'on déterminera, et en déduire sans calcul son espérance et sa variance.

**Exercice 10** – On lance une pièce truquée jusqu'à obtenir pour la première fois « face ». Quelle est la probabilité que le nombre de lancers soit pair ? impair ?

**Exercice 11 – (adapté de ESC 2005)**
Dans tout l'énoncé, $S$ désigne un entier naturel non nul fixé. Une urne contient $4S$ boules indiscernables au toucher : $S$ boules rouges, $S$ boules vertes et $2S$ boules bleues.
On effectue des tirages successifs d'une boule, au hasard, avec le protocole suivant :
- Si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne, et on remet à sa place une boule bleue.
- Si la boule tirée est verte, on la remet dans l'urne
- Si la boule tirée est bleue, on ne la remet pas dans l'urne, et on remet à sa place une boule rouge.

On note, pour tout entier naturel non nul $n$, $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne après le $n$-ième tirage, et on note $X_0$ la variable aléatoire certaine égale à $S$.

1. Déterminer la loi de $X_1$ et de $X_2$ et calculer leurs espérances
2. On suppose que $n \geqslant 2S$, de sorte que $X_n(\Omega) = \{0, \dots, 3S\}$.
   (a) Soit $k \in [\![0, 3S]\!]$. Quelle est la composition de l'urne lorsque l'événement $[X_n = k]$ se réalise ? En déduire la loi de $X_{n+1}$ conditionnellement à l'événement $[X_n = k]$ (on pourra séparer les cas $k = 0$, $k = 3S$ et $k \in [\![1, 3S - 1]\!]$).
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2S$, $E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{2S}\right) E(X_n) + \frac{3}{4}$
   (c) En déduire, pour tout $n \geqslant 2S$, l'expression de $E(X_n)$ en fonction de $E(X_{2S})$, de $S$ et de $n$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n) = \dfrac{3}{2} \cdot S$
3. Écrire une fonction Pascal prenant en paramètre un entier $S$ et un entier $n$, et renvoyant la valeur de $X_n$ obtenue lors d'une simulation de la réalisation d'une expérience telle que ci-dessus. Précisez ce qu'il ne faut pas oublier dans le corps de programme pour que cette fonction soit une simulation correcte de cette expérience.

**Exercice 12** – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, et $F_X$ sa fonction de répartition. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_X(n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n \, \mathrm{d}x.$$

**Exercice 13** – **(Oral HEC)** – Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels, et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a \cdot \frac{\alpha^k + \beta^k}{k!}$.

1. Suivant les signes de $\alpha$ et $\beta$, discuter l'existence de $a$ pour que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit une loi de probabilité. Le cas échéant, déterminer $a$.
2. Dans les cas où on a défini une loi, soit $X$ une v.a.r. suivant cette loi. Déterminer l'espérance et la variance de $X$.
3. Peut-il arriver que $X$ suive une loi de Poisson ?

**Exercice 14** – (Oral HEC) –

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. CNS sur $a$ et $b$ pour que $A$ soit diagonalisable ?
2. Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. indépendantes suivante une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Soit $M$ la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité de l'événement : « $M$ est diagonalisable ».

**Exercice 15** – **(HEC 2007)**

1. Définition des matrices semblables. Donner la formule de changement de base pour les matrices d'endomorphismes.

Une urne blanche contient $n$ boules blanches et une urne rouge $n$ urnes rouges. On tire à chaque étape au hasard une boule de chaque urne et on remet chacune de ces boules dans l'urne de laquelle on ne l'a pas tirée. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $X_k$ le nombre de boules blanches dans l'urne blanche à l'issue de l'étape $k$. En particulier, $X_0 = n$, et $X_1 = n - 1$ (avec probabilité 1).
On pose pour $k$ entier positif

$$Z_k = \begin{pmatrix} P([X_k = 0]) \\ P([X_k = 1]) \\ \vdots \\ P([X_k = n] \end{pmatrix}.$$

2. Trouver une matrice $A$ à coefficients entiers telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad Z_k = \frac{1}{n^2} A Z_{k-1}.$$

   On pose par la suite $B = \frac{A}{n^2}$.
3. On suppose dans cette question que $n = 2$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $B$ et en déduire, pour $k$ fixé la valeur de $E(X_k)$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comment peut-on interpréter chacun des coefficients de la matrice $B^k$ ? Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que tous les coefficients de $B^k$ sont strictement positifs pour tout $k \geqslant k_0$.
5. Calculer $P([X_n = 0])$. Que retrouve-t-on ?

**Exercice 16** – **(HEC 2007)**

1. Définition et convergence d'une série géométrique. Donner les formules de sommation d'une série géométrique et de ses dérivées successives.

*Une urne contient $n$ jetons numérotés de 0 à $n - 1$. On tire un à un, avec remise et au hasard, 3 jetons dont les numéros sont notés $X$, $Y$ et $Z$ respectivement. On tire ensuite 3 autres jetons, un à un, sans remise, et on note $A$, $B$ et $C$ respectivement les numéros obtenus. On pose :*

$$p_n = P(X + Y = Z) \qquad \textit{et} \qquad q_n = P(A + B = C).$$

2. (a) Calculer $p_n$.
   (b) Calculer $q_n$ en distinguant les cas $n$ pair et $n$ impair.
   (c) Montrer que $\frac{p_n}{q_n} \to 1$ quand $n \to +\infty$.

3. (a) Calculer $r_n = P(X+Y+Z = n-1)$.
   (b) Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :
$$E(s^{X+Y+Z}) = \frac{1}{n^3}\left[\frac{1-s^n}{1-s}\right]^3.$$
   (c) Retrouver alors la valeur de $r_n$ à l'aide de la formule ci-dessus.

**Exercice 17 – (ESCP 2009)**
On dispose de $N$ boîtes indiscernables ($N \in \mathbb{N}^*$) dans lesquelles on place l'une après l'autre des billes de façon aléatoire, avec équiprobabilité du choix des urnes à chaque placement et indépendance des différents choix.
Pour $j$ positif ou nul, on note $X_j$ le nombre de boîtes non vides après les $j$ premiers lancers. Par convention $X_0 = 0$ et on suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire réelle $X_j$ ?
   Soit $j \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}$.
2. (a) Déterminer la loi de probabilité de $X_0$, $X_1$, $X_2$.
   (b) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les probabilités conditionnelles :
$$P_{[X_j=i]}([X_{j+1} = k]) \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant N.$$
   (c) En déduire, pour tout $k \in N$, l'expression de : $P([Xj+1 = k])$ en fonction des nombres $P([X_j = i])$, $1 \leqslant i \leqslant N$.
3. Soit $j \in \mathbb{N}$. On numérote les boîtes de 1 à $N$.
   On considère les événements :
   - $B =$ « au moins une boîte est restée vide au terme de $j$ lancers »
   - $B_i =$ « la boîte de numéro $i$ est restée vide au terme de $j$ lancers » ($1 \leqslant i \leqslant N$).

   (a) Déterminer la probabilité $P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_\ell})$ pour tous indices tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leqslant N$.
   (b) En déduire $P(B)$.
   (c) En déduire $P([X_j = N])$.
4. Écrire un programme Pascal permettant de simuler la variable aléatoiree $X_j$.

**Exercice 18 – (ESCP 2008)**
Un individu gravit un escalier. À chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité $p$ (avec $0 < p < 1$) et progresse d'une marche s'il obtient « pile » et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient « face ».

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_n$ le nombre de marches gravies à l'issue des $n$ premiers pas et $X'_n$ le nombre de fois où l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des $n$ premiers pas.
   (a) Déterminer une relation simple liant $X_n$ et $X'_n$. En déduire la loi de $X_n$.
   (b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de $X_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Y_n$ le nombre aléatoire de pas juste nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n$-ième marche et $E(Y_n)$ l'espérance de $Y_n$.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $Y_n$ ?
   (b) Déterminer la loi de $Y_1$, puis celle de $Y_2$ et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel $k$, et tout entier $n \geqslant 3$, on a :
$$P(Yn = k) = p \times P(Y_{n-1} = k-1) + (1-p) \times P(Y_{n-2} = k-1).$$
   (d) Montrer que pour $n \geqslant 3$, $E(Y_n) = p.E(Y_{n-1}) + (1-p)E(Y_{n-2}) + 1$.
3. On considère l'ensemble $E$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \geqslant 3$ on ait :
$$u_n = pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} + 1.$$
   (a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha$, que l'on déterminera, tel que la suite $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à $E$.
   (b) Montrer que $u$ appartient à E si et seulement si la suite $v \;:\; n \mapsto u_n - \alpha n$ vérifie la relation : $\forall n \geqslant 3,\ v_n = pv_{n-1} + (1-p)v_{n-2}$.
   (c) En déduire la valeur de $E(Y_n)$.