

Probabilités 3 – Vecteurs aléatoires

Exercice 1 – Soient X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\{0, 1\}$, dont la loi conjointe est :

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{6} + p; \quad P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{2} - p; \quad P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{3} - p; \quad P(X = 1, Y = 1) = p.$$

1. Conditions sur p pour que cela définisse une loi conjointe ?
2. Reconnaître alors les lois de X et Y
3. Calculer $\text{cov}(X, Y)$, et le coefficient de corrélation.
4. Comment choisir p pour que X et Y soient indépendantes ?

Exercice 2 – Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux v.a.r. indépendantes. Soit $k \in \llbracket 0, n + m \rrbracket$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $X + Y = k$. En déduire sans calcul l'espérance et la variance conditionnelle de X sachant $X + Y = k$.

Exercice 3 – Soit, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $p_{i,j} = \lambda i j$.

1. Déterminer λ pour que cela définisse une loi conjointe.
2. Pour cette valeur de λ soit (X, Y) un couple de v.a.r. admettant cette loi conjointe.
 - (a) Déterminer les lois marginales de X et Y .
 - (b) Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner la valeur de $\text{cov}(X, Y)$, et en déduire la valeur de $E(XY)$.

Exercice 4 – On considère deux dés cubiques A et B . Le dé A porte les nombres $-2, -2, 1, 1, 1, a$. Il est équilibré. Soit X la valeur obtenue en lançant le dé A .

1. Déterminer la loi et l'espérance de X . Dans la suite de l'exercice, on suppose que $E(X) = 0$. Quelle est alors la valeur de a ?
2. On lance 4 fois le dé A . Probabilité d'obtenir trois fois un 1. Probabilité d'obtenir 4 nombres dont la somme vaut 1.
3. Le dé B porte les nombres $-2, -1, 0, 1, 2$ et 3. Il n'est pas équilibré. Les probabilités d'apparition des faces (dans l'ordre indiqué ci-dessus) forment une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face du dé B .
4. On lance simultanément A et B , et Y désigne la valeur absolue de la somme des points obtenus.
 - (a) Donner la loi conjointe de (X, Y) . Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
 - (b) En déduire la loi marginale de Y .

Exercice 5 – Soit X une v.a.r. prenant ses valeurs dans $\mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $p_k = P(X = k)$, $p = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k$ et $q = 1 - p = \sum_{k=1}^{+\infty} p_{-k}$. On définit $X^+ = \max(X, 0)$, $X^- = \min(X, 0)$.

1. Montrer que X^+ et X^- prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$.
2. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (X^+, X^-) .
3. Les v.a.r. X^+ et X^- sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 – Soit (X, Y) un couple de v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi conjointe :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = j, Y = k) = \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{e j! k!}$$

1. Déterminer λ .
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance de la v.a.r. 2^{X+Y} .

Exercice 7 – Le nombre de personnes N se présentant à un bureau de poste suit une loi de Poisson de paramètre λ . Une personne vient avec une probabilité p pour poster un envoi, et une probabilité $q = 1 - p$ pour une autre opération ($0 < p < 1$). On suppose que chaque personne n'effectue qu'une opération, et qu'elles font ces opérations indépendamment les unes des autres.

On note X le nombre de personnes venant poster une lettre, et Y le nombre de personnes venant pour une autre opération.

1. Quelle est la loi de X sachant $N = j$?
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, N) .
3. En déduire la loi de X . Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.
4. Montrer que X et Y sont indépendantes
5. En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\text{cov}(X, N)$. Commenter le signe.
6. Calculer le coefficient de corrélation $\rho_{X,N}$. N peut-elle être une fonction affine de Y ?

Exercice 8 – On considère une v.a.r. N , $N(\Omega) = \mathbb{N}$. Si N prend la valeur n , on procède à une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p . On note S et E le nombre de succès et d'échecs dans ces n épreuves.

1. Montrer que si $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors E et S sont des v.a.r. de Poisson dont on déterminera le paramètre. Montrer que dans ce cas, E et S sont indépendantes.
2. Réciproquement, montrer que si E et S sont indépendantes, alors N est de Poisson.
Indication : on peut écrire $(k + \ell)!P(N = k + \ell) = u_k v_\ell$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont géométriques.

Exercice 9 – Dans un sac, il y a $n - 2$ boules noires et 2 boules blanches. On tire les boules une à une sans remise. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche, Y le rang d'apparition de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. En déduire les lois de X et Y .
3. Calculer le coefficient de corrélation du couple (X, Y) .

Exercice 10 – Soient a un entier naturel non nul, et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. À un péage d'autoroute comportant n guichets, na voitures se présentent. Chaque conducteur choisit un guichet au hasard, de manière équiprobable. Les choix des automobilistes sont supposés indépendants entre eux. On note X_i le nombre de voitures ayant passé par le guichet numéro i .

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i .
2. (a) Calculer $V(X_1 + \dots + X_n)$.
(b) En déduire $\text{cov}(X_i, X_j)$, où i et j sont des entiers distincts quelconques de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
3. (a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_i et X_j .
(b) Commenter le cas $n = 2$.

Exercice 11 – Soient X et N deux variables discrètes définies sur le même univers Ω , telles que $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = k]$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, k\}$.

On note, pour tout entier k , $p_k = P(N = k)$.

1. (a) Déterminer la loi du couple (X, N) en fonction de la loi de N .
(b) Donner, sous forme d'une somme, la probabilité $P(X = i)$ pour i entier naturel.
(c) Montrer que $(N - X)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et que $N - X$ suit la même loi que X .
2. On suppose dans cette question, qu'il existe un entier n supérieur ou égal à 2 vérifiant, pour tout $k \geq n + 1$, $p_k = 0$, et pour tout $k \leq n$, $p_k > 0$.
(a) Justifier l'existence des espérances et variances de N et X , et de la covariance de N et X .
(b) Trouver une relation entre $E(N)$ et $E(X)$, puis entre $V(N)$ et $\text{cov}(N, X)$.
(c) Calculer $\text{cov}(N, N - 2X)$. Les variables aléatoires N et $N - 2X$ sont-elles indépendantes ?
3. On suppose dans cette question que $p_0 = p_1 = 0$, et $\forall k \geq 2$, $p_k = \frac{1}{k(k-1)}$.
(a) Déterminer explicitement la loi du couple (X, N) et la loi de X .
(b) Les variables aléatoires X et N admettent-elles une espérance ?
(c) Montrer que les variables aléatoires $\frac{1}{X+1}$ et $\frac{1}{N+1}$ admettent des espérances et les calculer.

Exercice 12 – Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

- Déterminer la loi de Y_n .
- (a) Discuter, suivant les valeurs de i et j , l'indépendance de Y_i et Y_j .
(b) Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 3, déterminer la matrice des variances-covariances du vecteur $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.
(c) En déduire la variance de $\sum_{i=1}^n Y_i$.

Exercice 13 – Soient n et s des entiers supérieurs ou égaux à 2. On considère une urne contenant des boules de couleurs $C_1, C_2, \dots, C_s$. Les boules de couleur C_i sont en proportion p_i . On suppose qu'aucun des p_i n'est nul. On effectue n tirages successifs d'une boule, avec remise dans cette urne. Pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules de couleur C_i obtenues à l'issue des n tirages.

- (a) Pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, déterminer la loi de X_i , son espérance et sa variance.
(b) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, s \rrbracket^2$, déterminer $\text{cov}(X_i, X_j)$.
- On pose $Y_i = \frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ et M la matrice des covariances du vecteur $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$.
(a) Montrer que $M = I - N$, où I est la matrice unité, et N une matrice que l'on déterminera.
(b) Montrer que $N^2 = N$ et déterminer le rang de N .
(c) Montrer qu'il existe une matrice Q telle que ${}^tQQ = I$ et telle que $M = QJ_{s-1}{}^tQ$, où J_{s-1} est la matrice carrée d'ordre s , diagonale, dont les $s - 1$ premiers éléments diagonaux sont égaux à 1, le dernier étant nul (on ne demande pas de calculer explicitement Q)

$$3. \text{ On définit le vecteur aléatoire } \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = {}^tQ \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

On note $a_{i,j}$ l'élément de la ligne i et de la colonne j de tQ .

- Exprimer chaque Z_i en fonction de $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ et des $a_{i,j}$.
- Montrer que les variables aléatoires Z_i sont centrées.
- Déterminer la matrice des covariances du vecteur $\mathbf{Z}$. Qu'en déduit-on pour la variable Z_s ?

Exercice 14 –

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p^n . On suppose que les X_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n X_{n+1}$, et $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

- (a) Soit X et Y deux variables aléatoires admettant des variances. Rappeler la relation existant entre $V(X + Y)$, $V(X)$, $V(Y)$ et $\text{cov}(X, Y)$.
(b) En déduire que pour tout n -uplet $(T_1, \dots, T_n)$ de variables aléatoires admettant des variances,

$$V\left(\sum_{k=1}^n T_k\right) = \sum_{k=1}^n V(T_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(T_i, T_j).$$

- Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de $\sum_{k=1}^n X_k$.
- (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n .
(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de Z_n .
- (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi et l'espérance de $Y_n Y_{n+1}$.
(b) Déterminer, pour tout couple (k, ℓ) d'entiers strictement positifs, $\text{cov}(Y_k, Y_\ell)$.
(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variance de Z_n .

Exercice 15 – (HEC 2009)

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p ($p \in]0, 1[$).

On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi géométrique.
2. Déterminer la loi de U .
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
 - (a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[U = n]$.
 - (b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(X_1 | U = n)$. En déduire la valeur de $E(X_1)$.
4. Déterminer la loi de T .
5.
 - (a) Calculer $\text{cov}(U, T)$.
 - (b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 16 – (ESCP 2009)

Une personne envoie des courriers électroniques via deux serveurs notés A et B . L'expérience montre que le serveur A est choisi avec la probabilité p (avec $p \in]0, 1[$) et le serveur B le reste du temps, les choix successifs étant supposés indépendants. Les envois sont représentés par une suite de lettres. La séquence $ABBBAAB \dots$ signifie que le premier message a transité par le serveur A , les trois suivants par B , les cinquième et sixième messages par A , le suivant par B , etc. On dit, dans ce cas (comme pour $BAAABBA \dots$) que l'on a une première série de longueur 1, une deuxième de longueur 3, une troisième de longueur 2, ...

On note L_1 la variable aléatoire égale à la longueur de la première série, L_2 égale à celle de la deuxième série, L_3 de la troisième série.

1.
 - (a) Déterminer la loi de L_1 .
 - (b) Montrer que L_1 admet une espérance et une variance. Calculer l'espérance $E(L_1)$.
2.
 - (a) Donner la loi du couple (L_1, L_2)
 - (b) En déduire la loi de L_2 .
 - (c) Calculer l'espérance $E(L_2)$.
3. Déterminer la loi de L_3 .
4.
 - (a) Justifier l'existence de la covariance $\text{cov}(L_1, L_2)$ de L_1 et L_2 .
 - (b) Calculer cette covariance et préciser son signe.

Exercice 17 – (HEC 2010)

Soit p un réel donné de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère un couple (U, T) de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont la loi de probabilité est donnée par : pour tout entier $n \geq 2$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$P([U = n] \cap [T = t]) = \begin{cases} p^2 q^{n-2} & \text{si } |t| \leq n-2 \text{ et si } n, |t| \text{ de même parité,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Loi marginales, lois conditionnelles.
2. Vérifier que $\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{\substack{|t| \leq n-2 \\ n, t \text{ de même parité}}} p^2 q^{n-2} = 1$.
3.
 - (a) Déterminer la loi marginale de U
 - (b) En distinguant les trois cas $t = 0$, $t > 0$ et $t < 0$, montrer que la loi marginale de T est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad P([T = t]) = \frac{pq^{|t|}}{1+q}.$$

- (c) Calculer $E(T)$.
4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
 - (a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[U = n]$.
 - (b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(T/U = n)$ de T sachant $[U = n]$.
 5.
 - (a) Justifier l'existence de $E(U)$ et de $E(UT)$. Calculer $\text{cov}(U, T)$.
 - (b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?