

Probabilités 4 – Variables aléatoires à densité

Exercice 1 – Parmi les fonctions suivantes, lesquelles définissent la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ? Déterminer dans ce cas une densité associée, ainsi que l'existence et la valeur de l'espérance.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{2^{n+1}} + 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \in]n, n+1], n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = a(\text{Arctan } x + b), (a, b) \in \mathbb{R}^2.$

Exercice 2 – Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des densités d'une variable aléatoire à densité ? Dans ce cas, déterminer la fonction de répartition associée. Étudier l'existence et la valeur de l'espérance et de la variance. Déterminer la fonction de répartition et une densité de $|X|$, X^2 , $\exp(X)$, $\ln |X|$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \beta x^\alpha & \text{si } x > 1, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin x + 1.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{x^2 + x + 2}, a \in \mathbb{R}$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{ae^{-t}}{1+e^{-t}} & \text{si } x > 0, a \in \mathbb{R} \end{cases}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{(x^2 + 1)^2}, a \in \mathbb{R}$
6. Soit $n \in \mathbb{N}; \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ et } x \geq n \\ aE(x) & \text{si } x \in]0, n[, a \in \mathbb{R} \end{cases}$
7. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ (\frac{a}{E(x)^2}) & \text{si } x > 1, a \in \mathbb{R} \end{cases}$

Exercice 3 – Soit pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{x^2+1}$.

1. Déterminer a pour que f soit une densité.
2. Déterminer une densité de e^X
3. Déterminer une densité de X^2
4. Déterminer une densité de $X^2 + 2X + 2$
5. Déterminer une densité de $X^4 + 2X^2 + 2$.

Exercice 4 – Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

1. (a) Prouver que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité, dont on déterminera une densité.
(b) Étudier l'existence de l'espérance et de la variance de X .
(c) Calculer l'espérance de X .
2. On pose $Y = \frac{e^X+1}{e^X-1}$.
(a) Déterminer la fonction de répartition de Y .
(b) Déterminer une densité de Y . La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 5 – Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = te^{-t}$ sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Soit X une v.a.r. de densité f .
2. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
3. Déterminer la loi de la v.a.r. discrète $\lfloor X \rfloor$ (partie entière)
4. Déterminer la fonction de répartition de la variable $D = X - \lfloor X \rfloor$. En déduire que D est une variable aléatoire à densité, et en donner une densité.

Exercice 6 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$ indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y$.

Exercice 7 –

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 2])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 4])$, indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y$.
2. Même question si plus généralement $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b]$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}[c, d]$.

Exercice 8 – Soit X et Y deux variables indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0, 1]$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Déterminer une densité de $X + Y$.

Exercice 9 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-2, 1])$.

1. Soit $Z = X^2$. Après avoir justifié leur existence, calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.
2. Déterminer une densité de Z , et retrouver la valeur de $E(Z)$ à l'aide de cette densité.

Exercice 10 –

1. Comment choisir a pour que la fonction f suivante soit une densité de probabilité :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{a}{(x+1)(x+2)(x+3)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de la question précédente, et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$. On suppose X et Y indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y$.

Exercice 11 – (Loi de Rayleigh)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
4. On pose $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y .

Exercice 12 – (Loi de Cauchy)

Soit X une variable de densité f , supposée continue sur $\mathbb{R}$. On pose $Y = \frac{1}{X}$.

1. Montrer que Y est une variable de densité g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$, et $g(0) = 0$.
2. Démontrer que la v.a.r. Y possède une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge absolument, et que dans ce cas,

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt.$$

3. On considère le cas particulier où $f : t \mapsto \frac{a}{\pi(a^2 + t^2)}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.
 - (a) Montrer que f est une densité de probabilité. Soit alors X une variable de densité f . On dit que X suit la loi de Cauchy de paramètre a .
 - (b) Préciser une densité g de la variable $Y = \frac{1}{X}$. Étudier l'existence de l'espérance des variables X et Y .
 - (c) Calculer $P(X^2 - aX < 0)$.
4. On considère X et Y deux variables indépendantes, de même loi de densité f définie dans la question précédente, dans le cas particulier où $a = 1$.
 - (a) En revenant à la définition, montrer que la variable $X_1 = \ln |X|$ est une variable à densité, et déterminer sa densité.
 - (b) Soient α et β deux réels distincts, déterminer α' et β' deux réels dépendant de α et β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}, \quad \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{\alpha'}{x-\alpha} + \frac{\beta'}{x-\beta}.$$

- (c) Montrer que la variable $\ln |XY|$ est une variable continue dont une densité k est définie par $k(x) = \frac{4xe^x}{\pi^2(e^{2x}-1)}$ si $x \neq 0$, et $k(0) = \frac{2}{\pi^2}$.

5. (a) Montrer que la variable $T = |XY|$ est une variable à densité, et en déterminer une densité.
- (b) En déduire la convergence et la valeur des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$ et $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$.

Exercice 13 – Soit f la fonction définie par $f(x) = \lambda 2^{-x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = \mu 2^x$ si $x < 0$, où λ et μ sont deux réels.

1. Quelles relations doivent vérifier λ et μ pour que f soit une densité de probabilité?
2. Peut-on déterminer λ et μ pour qu'une variable X admettant f pour densité soit centrée?
On suppose désormais que λ et μ sont choisis de la sorte.
3. Montrer que la v.a.r. X de densité f admet une variance et la calculer.
4. Déterminer la fonction de répartition de X .
5. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$. Déterminer la loi de Y et calculer $E(Y)$.

Exercice 14 – Soit X suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y suivant une loi uniforme sur $[2, 4]$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y$.

Exercice 15 – Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{6} \lfloor x + 1 \rfloor$ si $x \in [0, 3]$, et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité égale à f , et soit Y une variable suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y$.
3. Même question si Y suit une loi exponentielle de paramètre 2.

Exercice 16 – Soit X , Y et Z des variables à densité mutuellement indépendantes, suivant des lois uniformes sur $]0, 1]$.

1. Déterminer une densité de $X + Y + Z$.
2. Justifier que $\ln X$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.
3. Déterminer une densité de $\ln X + \ln Y + \ln Z$.
4. En déduire une densité de XYZ .

Exercice 17 –

1. Déterminer a pour que f définie par $f(x) = a$ si $x \in [0, 1]$, $f(x) = 3a$ si $x \in [1, 2]$, et $f(x) = 0$ sinon soit une densité de probabilité.
Dans la suite de l'exercice, X et Y désignent deux variables aléatoires indépendantes admettant f pour densité.
2. Après avoir justifié leur existence, déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer une densité de $X + Y$.
4. Soit $Z = (e^X - 2)^2$. Après avoir justifié son existence, calculer $E(Z)$.
5. Déterminer une densité de Z .

Exercice 18 – Soit X , Y et Z des variables mutuellement indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{U}([0, 1])$, $\mathcal{U}([0, 2])$ et $\mathcal{U}([0, 3])$. Déterminer une densité de $X + Y + Z$.

Exercice 19 – (d'après EDHEC 2008)

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels x et y pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Dans la suite, X et Y sont des variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note F_X (respectivement F_Y) la fonction de répartition de X (respectivement Y).
 - (a) Déterminer une densité de X^2 (on vérifiera en particulier que X^2 est une variable à densité)
 - (b) Déterminer une densité de $-Y$.

(c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d) Déterminer enfin la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 20 – (Questions indépendantes)

1. Déterminer une densité de $X - Y$ lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Cauchy (de densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(x^2+1)}$) et une loi uniforme sur $[0, 1]$ (on pourra commencer par déterminer une densité de $-Y$)
2. Déterminer une densité de XY lorsque X et Y sont deux variables indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ (on pourra commencer par déterminer une densité de $\ln X$ et de $\ln Y$)
3. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, mutuellement indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y + Z$.

Exercice 21 – (Oral ESCP)

1. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0, 1[$, possédant une densité g continue sur $]0, 1[$. Montrer que Z possède une espérance.
On suppose de plus que pour tout $x \in]0, 1[$, $g(1-x) = g(x)$. Quelle est, dans ce cas, l'espérance de Z ?
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $] -1, 1[$, et calculer sa dérivée.
3. Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. Montrer que cette intégrale converge et la calculer.
Indication : faire une mise sous forme canonique de l'expression sous la racine, pour vous ramener à la dérivée de φ .
4. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

5. Soit X une variable aléatoire admettant cette densité.
 - (a) Déterminer $E(X)$ en utilisant la première question.
 - (b) Retrouver ce résultat en utilisant la définition de l'espérance et le changement de variable $x = \sin^2 \theta$.

Exercice 22 – (ESCP 2010)

1. On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et est égale à $\sqrt{2\pi}$.
Donner deux éléments de E
2. Pour $f \in E$, on note $F_f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
Montrer que F_f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $J =]0, 1[$, puis montrer qu'il existe une unique fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

et montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Pour $f \in E$, on définit g_f sur $\mathbb{R}$ par : $g_f(t) = \frac{f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.
 - (a) Montrer que g_f est une densité de probabilité.
 - (b) On considère une variable aléatoire X_f de densité g_f . On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, paire et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f'(t)e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$.
Montrer que X_f possède une espérance et que celle-ci est nulle.