Plan de révision – programme de première année ECS

Les démonstrations les plus importantes sont indiquées par le sigle DAC (démonstration à connaître). Ces démonstrations sont à revoir, comprendre et savoir restituer. Les techniques et méthodes utilisées dans ces démonstrations peuvent être réutilisées dans des situations légèrement différentes dans des exercices ou problèmes, et doivent donc avoir été assimilées. Les autres démonstrations peuvent être passées plus rapidement, mais doivent être grossièrement connues tout de même.

Pour chaque chapitre, j'indique d'une part les notions et résultats essentiels à retenir, d'autre part les méthodes ou astuces classiques, les techniques calculatoires, ou les exercices-types en relation avec le chapitre, et qu'il faut impérativement maîtriser. Ainsi, chaque chapitre est divisé en une partie d'apprentissage, et une partie nécessitant un entraînement actif.

Pour chaque résultat important, demandez-vous si vous connaissez les hypothèses précises de validité. Pour chaque technique, demandez-vous si vous savez les mettre en oeuvre.

ANALYSE

1. Chapitre 1 : Nombres réels, topologie de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^n$

- **À savoir**
  - ❏ Notion d'intervalle
  - ❏ Notion de distance, de norme, de boule
  - ❏ Voisinages, ouverts, fermés
  - ❏ Intersections et unions d'ouverts ou de fermés
  - ❏ Bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$. Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.
  - ❏ Partie entière
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Résolution d'équations et d'inéquations simples dans $\mathbb{R}$, notamment :
    - équations et inéquations du second degré
    - équations et inéquations trigonométriques.
  - ❏ Manipulation des inégalités
  - ❏ Équations faisant intervenir la partie entière.
  - ❏ Savoir manipuler des bornes inférieures et supérieures

2. Chapitre 2 : Suites numériques

- **À savoir**
  - ❏ Notion de limite (définition par ε, unicité...)
  - ❏ Règles de calcul sur les limites, formes indéterminées. Croissances comparées
  - ❏ Théorème de prolongement des inégalités ; théorème d'encadrement.
  - ❏ Théorème des suites monotones. Suites adjacentes, théorème des suites adjacentes
  - ❏ Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, suites récurrences linéaires
  - ❏ Suites $u_{n+1} = f(u_n)$
  - ❏ $\sum_{k=1}^{n} k^a$, pour $a = 1, 2, 3$.
  - ❏ Équivalents, règles sur les équivalents, équivalents classiques.
  - ❏ petit-o, règles sur les o, expression d'un équivalent par o.
  - ❏ Déterminer des équivalents et des limites par des propriétés de négligeabilité (en négligeant les termes additifs négligeables)
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Explicitation des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires. Somme des premiers termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.

❏ Étude d'une suite récurrente de type $u_{n+1} = f(u_n)$
❏ Étude des suites définies implicitement par une relation $f_n(u_n) = 0$
❏ Calculs d'équivalents à l'aide des équivalents classiques
❏ Utilisation des petit-o pour éviter les sommes d'équivalents
❏ Déterminer des équivalents et des limites par des propriétés de négligeabilité (en négligeant les termes additifs négligeables)

3. Chapitre 3 : Séries numériques

- **À savoir**

❏ Notion de série ; convergence, divergence ; somme, reste.
❏ Si $\sum u_n$ converge, $u_n \to 0$ (DAC). **Réciproque fausse.** Divergence grossière.
❏ Convergence absolue. CVA $\Longrightarrow$ CV (DAC)
❏ Combinaisons linéaires de séries convergentes, absolument convergentes.
❏ TCSTP (DAC)
❏ Théorème de comparaison par équivalents (attention : séries à tp !!), par o.
❏ Comparaison entre série et intégrale (DAC : encadrer f sur chaque $[k, k+1]$, puis intégrer ; méthode souvent redemandée)
❏ Séries usuelles : séries géométriques et leurs dérivées (séries du binôme négatif), séries exponentielles, séries de Riemann.

- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**

❏ Étude de la nature d'une série par comparaison à une série de référence (inégalité, équivalent, petit-o)
❏ Certaines méthodes particulières de comparaison (HP, la méthode est à refaire à chaque fois) :
  – règle $n^\alpha u_n$, ou règle de Riemann
  – règle de d'Alembert (étude de la limite de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$).
❏ Étude de la convergence des séries « alternées » (résultat HP, méthode à connaître)
❏ Étude de la convergence d'une suite (u_n) par étude de la série de tg $u_{n+1} - u_n$.
❏ Calcul de certaines sommes en se servant de sommes connues : P étant un polynôme :
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$ (avec binôme négatif) ; $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(n)\frac{x^n}{n!}$ (avec séries exponentielles) ; Sommes télescopiques.
❏ Se servir de comparaisons séries/intégrales pour l'étude de certaines séries de type « Bertrand ».
❏ Savoir redonner le raisonnement de comparaison série/intégrale, afin de l'adapter au calcul d'équivalents de certaines sommes partielles, ou de restes de séries convergentes.

4. Chapitre 4 : Fonctions d'une variable réelle : limites

- **À savoir**

❏ Notion de limite (finie ou infinie) en un point (fini ou infini). Expression en termes de voisinage. Unicité. Caractérisation séquentielle.
❏ Règles de calcul sur les limites. Formes indéterminées. Croissances comparées.
❏ Limites et inégalités
❏ Limites à gauche, limites à droite, caractérisation séquentielle.
❏ Théorème d'existence des limites à droite et à gauche des fonctions monotones (DAC)
❏ Petit-o, équivalents. Règles sur les o et $\sim$. Équivalents classiques.

- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**

❏ Calculs d'équivalents à l'aide des équivalents classiques
❏ Calculs de limites par diverses techniques (règles usuelles, équivalents, croissances comparées...)
❏ Utilisation du critère séquentiel pour montrer l'inexistence d'une limite.
❏ Utilisation des o pour éviter de sommer des équivalents.

5. Chapitre 5 : Fonctions d'une variable réelle : continuité

- **À savoir**

❏ Définition de la continuité par les limites, par ε, en termes de voisinages. Critère séquentiel.
❏ Règles usuelles (somme, produit...)
❏ Continuité des fonctions usuelles
❏ Fonctions continues sur un segment (= intervalle fermé borné ; importance de chacun de ces trois mots), démonstration hors-programme

- ❏ TVI (3 versions à connaître) (DAC, par dichotomie)
- ❏ Image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné.
- ❏ Théorème de la bijection continue.

- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ recherche de l'existence d'un minimum et d'un maximum, par restriction à un intervalle fermé borné
  - ❏ Existence de la solution d'une équation par le TVI
  - ❏ (Existence et) unicité de la solution d'une équation par le théorème de la bijection.
  - ❏ Étude des suites et des fonctions définies implicitement ($f_n(u_n) = 0$, ou $f_x(g(x)) = 0$) : existence et unicité de ces suites ou fonctions par l'utilisation du théorème de la bijection

6. Chapitre 6 : Fonctions d'une variable réelle : dérivation

- **À savoir**
  - ❏ Définition par le taux d'accroissement. Dérivée à droite, à gauche.
  - ❏ Dérivées d'ordre supérieur, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.
  - ❏ Règles de calcul :
    - Somme, produit, quotient
    - Composition (DAC)
    - Formule de dérivation d'un produit $f_1 \dots f_n$
    - Formule de Leibniz (dérivation n-ième d'un produit) (DAC)
    - Dérivées des fonctions usuelles
    - Dérivées des fonctions réciproques. Cas de l'Arctan.
  - ❏ Dérivée en un extremum d'une fonction dérivable sur un ouvert (DAC)
  - ❏ Théorème de Rolle (DAC)
  - ❏ Théorème des accroissements finis ; inégalité.
  - ❏ Signe de f' et sens de variation (DAC)
  - ❏ Notion de primitive ; existence pour des fonctions continues ; expression par intégrale.
  - ❏ Deux primitives sur un *intervalle* ne diffèrent que d'une constante.
  - ❏ Fonctions convexes ; inegalité de convexité.
  - ❏ Dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes.
  - ❏ Caractérisation des fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables.
  - ❏ Position de la courbe d'une fonction convexe par rapport aux tangentes, aux cordes

- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ **Calculs de dérivée :** Entraînez-vous, vous perdez souvent beaucoup de temps dans des calculs sans difficulté, par manque d'habitude technique, en finissant presque toujours avec une ou plusieurs erreurs de calcul. Reprenez les techniques calculatoires de dérivées, et calculez les dérivées (et même les dérivées secondes, tierces etc.) de fonctions que vous vous donnez, en contrôlant vos résultats à l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice.
  - ❏ Étude détaillée d'une fonction : domaine de définition, symétries, variations, limites aux bords du domaine, asymptote et position de la courbe par rapport aux asymptotes, points d'inflexion, convexité, tracé.
  - ❏ Avoir le reflexe « convexité » pour justifier de petites inégalités du type $\ln(1 + x) \leqslant x$, $e^x \leqslant 1 + x$ ou $\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
  - ❏ Manipulation de l'Arctan. Primitivation de $\frac{u'}{1+u^2}$.
  - ❏ Utilisation du théorème de Rolle dans le cas d'un plus grand nombre de zéros. Situation typique : cas d'un polynôme dont toutes les racines sont réelles.
  - ❏ Utilisation du théorème de Rolle sur des intervalles non bornés
  - ❏ Utilisation du théorème de Rolle en cascade, utilisé sur les dérivées successives de f.
  - ❏ Utilisation du TAF dans l'étude de la vitesse de convergence de suites récurrentes

7. Chapitre 7 : Intégration

- **À savoir**
  - ❏ Construction de l'intégrale de Riemann par approximation inférieure et supérieure par des fonctions en escalier. L'idée globale est à retenir ; vous pouvez omettre les détails.
  - ❏ Théorème des sommes de Riemann dans le cas d'une subdivision régulière.
  - ❏ Propriétés générales des intégrales : linéarité, Chasles, positivité, stricte positivité pour des fonctions continues, inégalité triangulaire, intégrabilité du produit.

- ❏ Relation entre primitives et intégrales : formule du calcul des intégrales ; dérivation d'une intégrale dépendant de ses bornes (DAC)
- ❏ Primitives classiques
- ❏ Intégration partie (DAC) ; intégration par parties itérée
- ❏ Changement de variables
- ❏ Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$
- ❏ Équations différentielles $y' = g(x) \cdot y$.

- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Primitivation. Pour cela, bien connaître les formules de dérivation des fonctions usuelles (y compris l'Arctan), et la formule de dérivation d'une fonction composée, à reconnaître dans une expression donnée.
  - ❏ Pratique de l'intégration par parties ; reconnaître les situations propices à l'IPP. Par exemple intégrale d'une fonction produit d'un terme qui se dérive en une fraction rationnelle (ex : ln ou Arctan) et d'un terme se primitivant en une fraction rationnelle.
  - ❏ Cas particulier : $\int P(x)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$, où $P \in \mathbb{R}[x]$.
  - ❏ Savoir trouver des relations de récurrences entre intégrales dépendant d'un ou plusieurs paramètres entiers (souvent par intégration par parties).
  - ❏ Pratique du changement de variables.
  - ❏ Intégrales de fractions rationnelles simples, par « décomposition en éléments simples » (c'est-à-dire écriture de la fraction comme combinaison linéaire de termes $\frac{1}{(x-a)^\beta}$ ou $\frac{ax+b}{(cx^2+dx+e)^\beta}$, où le dénominateur est irréductible).
  - ❏ Intégrales de fractions en sin, cos, tan, dans des cas particuliers simples, par un changement de variable de type $y = \sin x$, $y = \cos x$ ou $y = \tan x$.

8. Chapitre 8 : Formules de Taylor et approximations polynomiales

- **À savoir**
  - ❏ Développement de Taylor, reste de Taylor, fonction développable en série de Taylor
  - ❏ Formule de Taylor-Young
  - ❏ Formule de Taylor-Lagrange ; inégalité de Taylor-Lagrange.
  - ❏ Formule de Taylor avec reste intégral (DAC)
  - ❏ Restes de Taylor et développements en séries de Taylor de certaines fonctions usuelles
  - ❏ Développements limités. Règles de calcul. Développements limités des fonctions usuelles.

- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ PRATIQUE DU DÉVELOPPEMENT LIMITÉ (faites-en, et beaucoup !)
  - ❏ utilisation des DL pour des calculs de limites, d'équivalents, équations de droites ou paraboles asymptotes et position locale de la courbe...
  - ❏ Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral pour justifier une dérivation sous le signe $\sum$ ou sous le signe $\int$ (voir exercices 14, 15, 17 de la feuille Analyse 10 de 2007/2008)
  - ❏ Utilisation de la formule de Taylor-Young pour justifier la primitivation d'un DL (exemple : obtenir un DL de $\operatorname{Arctan} x$ au voisinage de 0).

9. Chapitre 9 : Fonctions de plusieurs variables

- **À savoir**
  - ❏ Distances, normes, ouverts, boules, produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.
  - ❏ Fonctions de 2 variables, graphe, courbes de niveau
  - ❏ Limites : par ε, par voisinages, critère séquentiel.
  - ❏ Règles usuelles de continuité (sommes...)
  - ❏ Continuité et topologie : image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, image directe d'un fermé borné.
  - ❏ Dérivées partielles, gradient, notation ∇f ; fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
  - ❏ Développement limité à l'ordre 1, formule de Taylor-Young à l'ordre 1.
  - ❏ Formule de dérivation d'une composition.

- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Calculer des limites et étudier la continuité en se servant de majorations utilisant la norme.
  - ❏ Prouver la non-continuité soit par restriction à une courbe (paramétrée), soit par le critère séquentiel.
  - ❏ Calcul pratique des dérivées partielles et du gradient.
  - ❏ Calcul de DL à l'ordre 1, pour obtenir l'équation de plans tangents.

ALGÈBRE

1. Chapitre 1 : Fondements des mathématiques

Ne passez pas trop de temps sur ce chapitre parfois un peu technique. Concentrez-vous sur les aspects de méthode.

- **À savoir**
  - ❏ Vocabulaire logique, quantificateurs
  - ❏ Démonstration par la contraposée, par l'absurde.
  - ❏ Démonstration par disjonction des cas
  - ❏ Raisonnement par récurrence (récurrence simple, récurrence forte, récurrence d'ordre fixé k)
  - ❏ Langage ensembliste, constructions, ensemble des parties de E.
  - ❏ Applications. Image directe, image réciproque. Fonction image directe, fonction image réciproque, à ne pas confondre avec la fonction réciproque, qui n'existe pas toujours.
  - ❏ Injectivité, surjectivité, bijectivité. Règles de composition.
  - ❏ Notion de familles.
  - ❏ Notion de majorant, minorant, inf, sup. Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$. Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.
  - ❏ Justification du principe de récurrence par la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ (DAC)
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Savoir rédiger correctement une récurrence. Ne pas oublier de poser n et supposer l'hypothèse de récurrence au début de la preuve de l'hérédité.
  - ❏ Bonne rédaction générale d'un texte mathématique, notamment la définition de toutes les variables utilisées, soit en les posant, soit par l'utilisation du quantificateur idoine.
  - ❏ Maîtrise du langage ensembliste et des manipulations élémentaires sur les ensembles.
  - ❏ Savoir prouver une injectivité, une surjectivité.
  - ❏ Penser (si c'est possible et pas trop compliqué) à exhiber une réciproque pour justifier la bijectivité.

2. Chapitre 2 : Polynômes et nombres complexes

- **À savoir**
  - ❏ Définition formelle (suite à support fini), règles arithmétiques (somme, produit, dérivation formelles)
  - ❏ Degré, valuation ; règles sur les degrés
  - ❏ Division euclidienne
  - ❏ Racine, multiplicité, caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives (DAC).
  - ❏ Théorème important : si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ admet strictement plus de n racines, alors $P = 0$ (DAC).
  - ❏ Théorème de d'Alembert-Gauss, motivant l'introduction des nombres complexes. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$. Relation entre degré et multiplicité des racines.
  - ❏ Les racines complexes d'un polynôme réel sont deux à deux conjuguées (DAC)
  - ❏ i, propriétés et règles de calcul sur les complexes, les modules et les arguments.
  - ❏ Formules trigonométriques
  - ❏ Exponentielle complexe. Explicitation de la formule de Moivre en termes d'exponentielle complexe.
  - ❏ Racines n-ièmes de l'unité. Racines n-ièmes d'un complexe quelconque z.
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Savoir déterminer les degrés, coefficients dominants etc. de polynômes d'une suite définie par une récurrence simple.
  - ❏ Maîtriser l'algorithme de la division euclidienne. Savoir le mettre en pratique dans des cas concrets.
  - ❏ Savoir déterminer avec un minimum de calculs le reste de la division euclidienne par un polynôme de petit degré dont toutes les racines sont connues, et de multiplicité 1.
  - ❏ Savoir retrouver la factorisation en facteurs irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$ d'un polynôme à coefficients réels à partir de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, en regroupant les racines conjuguées.
  - ❏ Exercice classique : CNS pour que P' divise P.
  - ❏ Manipulation algébrique des nombres complexes.
  - ❏ Symétrisation d'une somme de deux complexes de même modules
  - ❏ Calcul de sommes de cos ou de sin.
  - ❏ Linéarisation de $\cos^k x$, $\sin^k x$, par la formule d'Euler suivie de la formule du binôme.
  - ❏ Délinéarisation de $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$ en utilisant la formule de Moivre.
  - ❏ Connaître les racines du polynôme $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$.

3. **Chapitre 3 : Espaces vectoriels**

- **À savoir**
  - ❏ Définition en 8 points, vocabulaire
  - ❏ Sous-espaces vectoriel. Critère.
  - ❏ Somme, somme directe (de deux sous-espaces seulement, au programme de 1e année), supplémentaire.
  - ❏ Combinaisons linéaires, espace engendré par une famille, notation Vect.
  - ❏ Familles, libres, génératrices. Bases. Caractérisation par minimalité d'une famille génératrice ou maximalité d'une famille libre.
  - ❏ Espaces de dimension finie
  - ❏ Théorème de la base incomplète (DAC, au moins dans ses grandes lignes)
  - ❏ Théorème de la dimension (DAC, au moins dans ses grandes lignes), définition de la dimension.
  - ❏ Rang d'une famille. Rang et liberté ; caractérisation d'une base par le rang et le cardinal ; par la liberté et le cardinal ; par le caractère générateur et le cardinal.
  - ❏ Dimension d'une somme directe, d'une somme quelconque.
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Prouver qu'un ensemble est un espace-vectoriel en moins d'une minute.
  - ❏ Prouver la liberté d'une famille, concrète (vecteurs de $\mathbb{R}^n$, ou famille de fonctions par exemple)
  - ❏ Prouver une égalité du type $A + B = C$, par analyse/synthèse.
  - ❏ Prouver que deux espaces sont en somme directe, sont supplémentaires. Simplification en dimension finie par un argument de dimension si possible.
  - ❏ Connaître la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. **Chapitre 4 : Applications linéaires et matrices**

- **À savoir**
  - ❏ Définition ; image, noyau, images directes et réciproques de sev ; composition. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$.
  - ❏ Endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.
  - ❏ Caractérisation des injections (par l'image d'une famille libre, par le Ker, DAC). Caractérisation des isomorphismes par l'image d'une base.
  - ❏ matrices, produit de matrices (notamment produit par une matrice colonne en terme de combinaison linéaire des colonnes), inverse, transposition d'un produit.
  - ❏ Produit de matrices diagonales, de matrices diagonales par blocs. Cas de l'exponentiation.
  - ❏ Formule du binôme.
  - ❏ rang d'une matrice
  - ❏ Représentation matricielle d'une AL de E dans F relativement à des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F. Cas des endomorphismes. Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
  - ❏ Relation entre la composition des AL et le produit matriciel.
  - ❏ Matrice passage. Formule de changement de base (DAC). Cas des endomorphismes.
  - ❏ AL en dimension finie : rang, rapport avec le rang des matrices ; formule du rang (DAC) ; caractérisation des isomorphismes, des automorphismes (DAC) ; formes linéaires et hyperplans.
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Calcul matriciel. Notamment le produit, en particulier la formule du produit par une matrice colonne, exprimé comme combinaison linéaire des colonnes.
  - ❏ Déterminer le rang d'une matrice dans des cas pas trop compliqués par simple considération des colonnes et d'éventuelles relations entre ces colonnes.
  - ❏ Savoir déterminer explicitement le rang, l'image et le noyau (décrits par une base ou par des équations) d'une AL canoniquement associée à une matrice explicite.
  - ❏ Écriture d'une application linéaire dans un choix de bases par calcul direct des images des éléments de la première base, décomposées dans la deuxième.
  - ❏ Exprimer correctement la formule donnant le changement de base. Faire explicitement ce changement de base (donnée initiale deux bases de E et la matrice d'un endomorphisme de E dans une des deux bases)
  - ❏ Montrer qu'une AL est injective, ou bijective (notamment en dimension finie)
  - ❏ Montrer l'existence d'une base telle que la matrice d'une endomorphisme vérifiant un certain nombre de propriétés relativement à cette base soit une matrice donnée (exemple typique de raisonnement par analyse/synthèse).

5. ### Chapitre 5 : Le pivot de Gauss

- **À savoir**
  - ❏ Matrices échelonnées. Rang d'une matrice échelonnée.
  - ❏ Opérations sur les lignes. Interprétation en terme de produit matriciel.
  - ❏ Algorithme du pivot de Gauss, jusqu'à obtention d'une matrice échelonnée
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ La méthode du pivot bien entendu.
  - ❏ Calcul du rang d'une matrice par la méthode du pivot
  - ❏ Inversibilité et calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot (pour les matrices carrées d'ordre 2, préférez le déterminant !). Facile de s'entraîner : donnez-vous au hasard une matrice M d'ordre 3 ou 4, déterminez l'inversibilité, et le cas échéant l'inverse ; il suffit ensuite de vérifier vos calculs en effectant le produit $M \cdot M^{-1}$. Entraînez-vous autant que nécessaire.
  - ❏ Résolution de systèmes de n équations à m inconnues.

6. ### Chapitre 6 : Diagonalisation

- **À savoir**
  - ❏ Diagonalisabilité, éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice. Expression matricielle de la relation de diagonalisabilité ($M = PDP^{-1}$)
  - ❏ Propriété de somme directe des sous-espaces propres (DAC)
  - ❏ Caractérisation de la diagonalisabilité en terme de dimension des espaces propres. Cas où le cardinal du spectre est égal à l'ordre de la matrice (c'est-à-dire la dimension de l'espace)(DAC)
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Rechercher les valeurs propres d'une matrice explicite.
  - ❏ Décider de la diagonalisabilité par l'étude des dimensions des espaces propres
  - ❏ Diagonalisation effective d'une matrice.
  - ❏ Cas particulier des matrices 2×2 à savoir faire rapidement par l'usage du déterminant.
  - ❏ Calcul de A^n par diagonalisation de A. Calcul d'une « racine carrée » dans certains cas.

PROBABILITÉS

1. ### Chapitre 1 : Combinatoire

- **À savoir**
  - ❏ Notion de cardinal d'un ensemble fini ; cardinal d'une union, formule du crible. Nombre de sous-ensembles, coefficients binomiaux.
  - ❏ Combinatoire des applications : p-listes, p-listes d'éléments distincts
  - ❏ Bijection, déesse de la combinatoire
  - ❏ Les modèles fondamentaux de tirage, la combinatoire associée
  - ❏ Formule de Pascal, formule de Vandermonde (DAC)
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Dénombrer des tirages suivant différentes modalités ; utiliser ces dénombrements dans des calculs de probabilité
  - ❏ Obtenir des égalités par des méthodes combinatoires
  - ❏ Manipulation des coefficients binomiaux ; formules de sommation des coefficients binomiaux.

2. ### Chapitre 2 : Statistiques

- **À savoir**
  - ❏ Définitions et terminologie
  - ❏ Mode, moyenne, écart-type, médiane d'une série statistique discrète ; cas des séries statistiques groupées.
  - ❏ Quantiles d'une série statistique groupée.
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Savoir calculer une médiane, un quantile.

3. **Chapitre 3 : Espaces probabilisés**

- **À savoir**
  - ❏ Terminologie événementielle
  - ❏ Algèbres, σ-algèbres (ou tribus). (σ-)algèbres engendrées.
  - ❏ Notion d'espace probabilisable (revoir ces notions, mais ne pas y passer trop de temps)
  - ❏ Mesure de probabilité, σ-additivité (par définition)
  - ❏ Propriétés élémentaires des mesures de probabilité (DAC). Crible de Poincaré.
  - ❏ Propriété de limite monotone (DAC)
  - ❏ Notion d'ensembles négligeables
  - ❏ Probabilité conditionnelle, indépendances
  - ❏ Les trois formules-clés :
    - Formule des probabilités totales (DAC)
    - Formule des probabilités composées (DAC)
    - Formule de Bayes (moins importante que les deux précédentes)
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Donner des noms aux événements nécessaires pour les calculs
  - ❏ Savoir exprimer l'événement dont on cherche la probabilité de manière ensembliste à l'aide d'événements élémentaires, afin d'exploiter cette structure ensembliste dans les calculs par les méthodes ci-dessous.
  - ❏ Savoir calculer la probabilité d'une intersection
    - en cas d'indépendance
    - en cas de chaîne décroissante infinie d'inclusions
    - dans le cas général, pour une intersection finie, notamment dans le cas d'événements successifs, chaque résultat dépendant d'un ou plusieurs résultats antérieurs.
  - ❏ Savoir calculer la probabilité d'une union
    - En cas d'incompatible (union disjointe)
    - En cas d'union infinie d'événements inclus les uns dans les autres
    - Par complémentarité, en se ramenant à une intersection
    - Par la formule du crible.
  - ❏ Utiliser la formule des probabilités totales à bon escient ; cette formule donne de la rigueur à tous les arguments de type « arbre des possibilités » ; elle est notamment à utiliser lorsque dans une succession d'événements, la probabilité d'un événement dépend d'un résultat obtenu précédemment (discussion).
  - ❏ Réussir à utiliser la formule des probabilités totales pour trouver des relations de récurrence, et savoir expliciter lesdites relations (on est le plus souvent ramené à des suites arithmético-géométriques, à revoir !)

4. **Chapitre 4 : Variables aléatoires réelles discrètes**

- **À savoir**
  - ❏ Variable aléatoire, système complet associé, tribu associée, fonction de répartition, propriétés, loi de probabilité
  - ❏ Variables indépendantes
  - ❏ Espérance, variance ; conditions d'existence
  - ❏ Linéarité de l'espérance, linéarité de la variance en cas d'indépendance.
  - ❏ Moments, moments centrés. Formule de Koenig-Huygens
  - ❏ $f(X)$: loi, théorème de transfert
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Savoir déterminer si une suite est une loi de probabilité
  - ❏ Savoir vérifier les conditions d'existence de $E(X)$ et $V(X)$ (étude de convergences de série)
  - ❏ Calculs classiques d'espérance, notamment, les méthodes de calcul des sommes de type $\sum P(n)x^n$ (en utilisant les dérivées de la série géométrique), $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$ (avec des séries exponentielles)...
  - ❏ Utilisation de la formule de K-H pour les calculs de variance.
  - ❏ Passer par le calcul de $E(X(X-1))$, $E(X(X+1))$ ou autre pour simplifier certains calculs de variance, via la formule de K-H (cf lois classiques)

5. **Chapitre 5 : Lois usuelles**

- **À savoir**
  - ❏ Expérience-type associée, loi, espérance, variance (DAC) des lois suivantes (à connaître par coeur) :
    - loi uniforme discrète
    - loi de Bernoulli, loi binomiale
    - loi géométrique
    - loi hypergéométrique
    - loi de Poisson
  - ❏ Il est utile d'avoir fréquenté la loi de Pascal (calcul des probabilités associés à l'expérience-type, et moments), la loi binomiale négative (et savoir faire le lien avec la loi de Pascal), et les lois du temps d'attente du premier succès ou plus généralement du r-ième succès lors d'un tirage sans remise (calcul des probabilités de cette loi à partir de l'expérience-type ; c'est un exercice classique)
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Les calculs de somme intervenant dans les calculs des moments de ces lois
  - ❏ Savoir reconnaître dans une expérience donnée une expérience-type d'une des lois classiques
  - ❏ Savoir reconnaître dans une certaine expression une loi classique.
  - ❏ Exprimer la loi du temps d'attente du r-ième succès lors de tirages avec remise (loi de Pascal). Calcul de l'espérance et de la variance, directement, ou en se ramenant à la loi géométrique.
  - ❏ Exprimer la loi du temps d'attente du premier succès lors de tirages sans remise. Calcul de l'espérance
  - ❏ Exprimer la loi du temps d'attente du r-ième succès lors de tirages sans remise.

6. Chapitre 6 : Vecteurs aléatoires

- **À savoir**
  - ❏ Loi conjointe, lois marginales d'un couple ; cas d'un couple de variables indépendantes.
  - ❏ Propriété caractéristique des lois conjointes
  - ❏ Loi conditionnelle
  - ❏ Loi de $g(X, Y)$, théorème de transfert, cas de variables indépendantes.
  - ❏ Cas de $X + Y$, de XY. $E(XY) = E(X)E(Y)$ si X et Y sont indépendantes (DAC)
  - ❏ Covariance, propriétés élémentaires (DAC)
  - ❏ Variance d'une somme dans le cas générale
  - ❏ Stabilité des lois classiques (DAC)
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Savoir montrer qu'une famille doublement indexée définit une loi conjointe.
  - ❏ Savoir trouver les lois marginales à partir d'une loi conjointe.
  - ❏ Étant donnée une loi conjointe, savoir justifier l'indépendance ou la non indépendance des variables aléatoires.
  - ❏ Savoir calculer une covariance,
    - soit en passant par le calcul de $E(XY)$
    - soit en passant par le calcul de $V(X + Y)$

    Garder cette dualité en tête.
  - ❏ Savoir calculer la variance de $X_1 + \cdots + X_n$ connaissant toutes les covariances, soit en utilisant la formule développée, soit en utilisant la matrice des variances-covariances (voir 2e année)
  - ❏ Cas classique où les X_i sont produits de 2 ou 3 variables de Bernoulli consécutives.

7. Chapitre 7 : Convergences et approximations

- **À savoir**
  - ❏ Inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebichev (DAC)
  - ❏ Convergence en probabilité
  - ❏ Loi faible des grands nombres (DAC), théorème d'or de Bernoulli
  - ❏ Convergence en loi pour des variables discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$
  - ❏ Approximations classiques (connaître les conditions d'approximation)
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Savoir adapter la démonstration de la loi faible des grands nombres à certains cas de variables non indépendantes, en exploitant la formule de la variance de la somme à l'aide des covariances.
  - ❏ Savoir évaluer un paramètre avec un intervalle de confiance, à l'aide des résultats d'une répétition d'événements, en utilisant le théorème d'or de Bernoulli.

- ❏ Savoir majorer $P(|X-\theta|>\varepsilon)$ à l'aide de $E((X-\theta)^2)$ soit en utilisant B-T si $\theta = E(X)$, soit en revenant à l'inégalité de Markov, appliquée à $(X-\theta)^2$ si $\theta \neq E(X)$ (étude de la convergence en probabilité)