Lycée La Bruyère, Versailles
ECS 2 – Mathématiques

Plan de révision – programme de deuxième année ECS

Pour chaque chapitre, j'indique d'une part les notions et résultats essentiels à retenir, d'autre part les méthodes ou astuces classiques, les techniques calculatoires, ou les exercices-types en relation avec le chapitre, et qu'il faut impérativement maîtriser. Ainsi, chaque chapitre est divisé en une partie d'apprentissage, et une partie nécessitant un entraînement actif.

Pour chaque résultat important, demandez-vous si vous connaissez les hypothèses précises de validité. Pour chaque technique, demandez-vous si vous savez les mettre en oeuvre.

ANALYSE

1. Chapitre 1 : Intégrales impropres

- **À savoir**
  - ❏ Notion d'intégrale impropre, d'impropriété
  - ❏ Notion de fausse impropriété (en une borne finie)
  - ❏ Résultats de convergence des intégrales de Riemann
  - ❏ Propriété du reste d'une intégrale convergente.
  - ❏ Caractérisation de la convergence par les limites d'une primitive
  - ❏ Propriétés générales de l'intégrale impropre : linéarité, Chasles, positivité, stricte positivité
  - ❏ Théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives (inégalité, équivalents, o...)
  - ❏ Semi-convergence
  - ❏ Intégration par parties pour les intégrales impropres
  - ❏ Changement de variables pour les intégrales impropres
  - ❏ Intégrale de Gauss
  - ❏ Fonction Gamma.
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Étude de la nature d'une intégrale (ne pas oublier la continuité) ; penser à la comparaison par o avec une intégrale de Riemann lorsqu'on a une exponentielle.
  - ❏ Pratique de l'IPP et du changement de variable
  - ❏ Étude de la semi convergence, par exemple en se ramenant à une intégrale absolument convergente par IPP ; exemple classique de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (intégrale de Dirichlet)
  - ❏ Intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$, où P est un polynôme (cdv $y = at$ puis intégrales Γ)
  - ❏ Intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$, par mise sous forme canonique
  - ❏ Utilisation des formules de Taylor pour prouver la possibilité dans certains cas de dériver sous le signe intégrale. Cas classique de la dérivée de la fonction Γ (voir TD)

2. **Chapitre 2 : Fonctions de plusieurs variables : continuité, classe $\mathcal{C}^1$**

- **À savoir**
  - ❏ Continuité et calcul différentiel à l'ordre 1 : voir première année (généralisation à n variables). Notamment les formules de dérivation de composition
  - ❏ Formule des accroissements finis
  - ❏ Dérivées partielles d'ordre 2, fonctions $\mathcal{C}^2$, règles de composition
  - ❏ Théorème de Schwarz.
  - ❏ Hessienne $\nabla^2 f$
  - ❏ Notations de Monge
  - ❏ Formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 et de Taylor-Young à l'ordre 2.
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Savoir calculer des dérivées partielles, gradients, hessiennes, y compris en des points particuliers (taux d'accroissement)
  - ❏ Savoir dériver les fonctions composées
  - ❏ Résolution d'équations aux dérivées partielles simples (avec démarche explicitée dans l'énoncé)
  - ❏ Manipulation de DL. Recherche de plans tangents

3. **Chapitre 3 : Extrema de fonctions de plusieurs variables**

- **À savoir**
  - ❏ Recherche d'extrema locaux sur un ouvert :
    - Condition nécessaire du premier ordre : notion de point critique.
    - Condition suffisante du second ordre, exprimée à l'aide de la forme quadratique q ou exprimée en terme de valeurs propres de la hessienne.
    - Cas des fonctions de 2 variables (notations de Monge)
  - ❏ Recherche d'extrema globaux
    - Existence, en se ramenant à un fermé borné par restriction ou prolongement
    - Recherche, en décomposant un ensemble en l'union d'un ouvert et du bord.
  - ❏ Extrema sous contrainte
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Trouver les points critiques
  - ❏ Savoir étudier la nature des points critiques
  - ❏ Décomposer le domaine et faire l'étude sur chacune des parties, soit par contrainte, soit par paramétrisation pour les bords.
  - ❏ Savoir traiter le cas particulier de fonctions polyomiales de degré 2
  - ❏ Savoir utiliser une propriété de convexité (positivité de la hessienne sur un ouvert, exploité par la formule de Taylor Lagrange)
  - ❏ Savoir trouver les points critiques sous contrainte.

ALGÈBRE

1. **Chapitre 1 : Compléments d'algèbre linéaire**

- **À savoir**
  - ❏ Voir première année.
  - ❏ Sommes directes de n sous-espaces vectoriels.
  - ❏ Compléments de diagonalisation, notamment CNS de diagonalisation exprimée à l'aide de la somme directe des sous-espaces propres
  - ❏ Polynômes annulateurs, relations entre valeurs propres et racines d'un polynôme annulateur
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Diagonaliser une matrice, évidemment
  - ❏ Calcul de A^n, par diagonalisation, à l'aide d'un polyôme annulateur et division euclidienne, ou par la formule du binôme
  - ❏ Racines d'une matrice
  - ❏ Utilisation d'un polynôme annulateur pour trouver les valeurs propres
  - ❏ Résolution de suites récurrentes imbriquées

2. **Chapitre 2 : Produits scalaires**

- **À savoir**
  - ❏ Formes bilinéaires
  - ❏ Représentation matricielle
  - ❏ Formule de changement de base
  - ❏ Produit scalaire
  - ❏ Norme euclidienne, expressions du produit scalaire à l'aide de la norme
  - ❏ Inégalité de Cauchy-Schwarz
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Montrer qu'une application est un produit scalaire.
  - ❏ Bien maîtriser (et savoir redémontrer) les cas classiques :
    - tous les produits scalaires définis par une intégrale
    - tr ${}^tAB$
    - ps donné par une matrice dans une base (le caractère défini positif s'étudie par mises sous forme canonique successives)
  - ❏ Penser à l'inégalité de CS. Les inégalités sur les intégrales nécessitent parfois d'introduire soi-même le ps adéquat.

3. **Chapitre 3 : Orthogonalité - Espaces euclidiens**

- **À savoir**
  - ❏ Notion d'orthogonalité. Familles orthogonales, orthonormales
  - ❏ Liberté des familles orthogonales
  - ❏ Expression des coordonnées d'un vecteur dans une bon
  - ❏ Théorème de Pythagore
  - ❏ Sous-espaces orthogonaux,
  - ❏ Projetés orthogonaux
  - ❏ Orthonormalisation de Schmidt
  - ❏ Notion d'espace euclidien
  - ❏ Matrice d'un endormophisme dans une bon
  - ❏ Matrices orthogonales
  - ❏ Endomorphismes symétriques. Diagonalisation.
  - ❏ Formes quadratiques.
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Savoir orthonormaliser
  - ❏ Savoir trouver une bon d'un espace (par orthonormalisation)
  - ❏ Savoir calculer un projeté orthogonal. Savoir déterminer la matrice d'un projecteur orthogonal
  - ❏ Savoir trouver une bon de vecteurs propres d'une matrice symétrique, par orthonormalisation de bases de chaque sev propre.
  - ❏ Savoir calculer la distance entre un point et un sev (par projection).
  - ❏ Savoir déterminer le signe d'une forme quadratique (par mises sous forme canoniques successives), en vue de l'étude des hessiennes notamment.
  - ❏ Étude classique de l'orthogonalité de certaines familles de polynômes, et étude de leurs racines par la technique exposée dans le DS 6.

PROBABILITÉS

1. **Chapitre 1 : Compléments de probabilités discrètes**

- **À savoir**
  - ❏ Révisions de première année
  - ❏ Théorèmes de Fubini pour l'inversion de signes sommes
  - ❏ Formule de l'espérance totale.
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**

- ❏ Toutes les méthodes et techniques de première année + la manipulation de la formule de l'espérance totale.

2. Chapitre 2 : Variables aléatoires à densité

- **À savoir**
  - ❏ Variables à densité, caractérisation par la fonction de répartition. Densité.
  - ❏ Calcul de probabilités d'appartenance à un intervalle
  - ❏ Premier théorème de transfert
  - ❏ Espérance, variance
  - ❏ Second théorème de transfert
  - ❏ Densité d'une somme de variables aléatoires indépendantes
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Déterminer qu'une fonction est une densité de probabilité
  - ❏ Déterminer une densité de $\varphi(X)$, en particulier $aX+b$, $\sqrt{X}$, e^X, X^2... (argument direct, ou premier théorème de transfert si c'est possible)
  - ❏ Calcul d'espérances et de variances
  - ❏ Loi de $\max(X_1,\dots,X_n)$, $\min(X_1,\dots,X_n)$
  - ❏ Calculer des produits de convolution pour obtenir une densité de $X+Y$, éventuellement par discussion sur x. Cas de $X-Y$ (d'abord exprimer $-Y$). Cas de $|XY|$ (passer au logarithme)

3. Chapitre 3 : Lois continues classiques

- **À savoir**
  - ❏ Loi uniforme continue, stabilité par CL, espérance, variance
  - ❏ Loi exponentielle, stabilité par homothétie, espérance, variance, caractérisation par l'absence de mémoire.
  - ❏ Lois Γ et γ, stabilité par homothétie, espérance, variance, stabilité par somme (avec indépendance).
  - ❏ Loi normale, stabilité par CL, espérance, variance, stabilité par somme, lecture des tables.
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Étude de la loi du chi-deux
  - ❏ Expression des lois uniformes et exponentielles à l'aide de la loi uniforme sur $[0,1]$. Simulation informatique.
  - ❏ Expressions de diverses lois à partir des lois classiques. Exemple : loi de Cauchy comme quotient de lois normales.

4. Chapitre 4 : Convergences et approximations (compléments)

- **À savoir**
  - ❏ Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev
  - ❏ Convergence en probabilité
  - ❏ Loi faible des grands nombres
  - ❏ Convergence en loi
  - ❏ Théorème de la limite centrée
  - ❏ Approximation
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Savoir utiliser la loi faible des grands nombres (et en particulier le théorème d'or de Bernoulli) pour donner un intervalle de confiance pour la probabilité de réalisation d'un événement (en ayant le résultat d'un grand nombre d'expériences)
  - ❏ Utilisation du théorème de la limite centrée pour obtenir des approximations de la loi normale
  - ❏ Simulation informatique de la loi normale, à l'aide du théorème de la limite centrée
  - ❏ Simulation des lois du khi-deux
  - ❏ Savoir démontrer des énoncés semblables à la loi faible des grands nombres, par exemple dans le cas où les variables ne sont pas indépendantes.

5. **Chapitre 5 : Estimation**

- **À savoir**
  - ❏ Notion d'estimateur
  - ❏ Biais, risque quadratique
  - ❏ Suite d'estimateurs, estimateurs asymptotiquement sans biais.
  - ❏ Estimateurs convergents.
  - ❏ Estimations par intervalles de confiance
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ Savoir calculer le biais et le risque quadratique.
  - ❏ Savoir montrer la convergence d'un estimateur sans biais, de risque quadratique tendant vers 0, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
  - ❏ Cas où l'estimateur est seulement asymptotiquement sans biais, soit par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, soit par l'inégalité de Markov
  - ❏ Savoir déterminer un intervalle de confiance à un taux de confiance donné pour une loi normale ; pour une loi quelconque, par utilisation du théorème de la limite centrée.

6. **Chapitre 6 : Vecteurs aléatoires : compléments**

- **À savoir**
  - ❏ Révisions de première année
  - ❏ Généralisations à n variables aléatoires
  - ❏ Covariance, coefficient de corrélation linéaire
  - ❏ Matrice des variances-covariances
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ les techniques de première année
  - ❏ le calcul de covariances. Pensez au théorème de transfert pour le calcul de $E(XY)$
  - ❏ Le calcul de la variance d'une somme. Pensez pour plus de formalisme à utiliser la matrice des variances-covariances.
  - ❏ Cas de successions de lois de Bernoulli non indépendantes.

7. **Chapitre 6 : Statistiques**

- **À savoir**
  - ❏ Toute la terminologie, séries discrètes, séries continues
  - ❏ Moyenne, écart-type
  - ❏ Médiane, q-quantiles
  - ❏ Statistiques bivariées, covariance, droites de régression
- **Méthodes classiques et techniques calculatoires à maîtriser**
  - ❏ savoir discrétiser une série stratistique continue
  - ❏ savoir calculer une médiane, un q-quantile