Algèbre 1 – Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et p et q deux projecteurs. Montrer que $p = q$ si et seulement si $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$ et $p \circ q = q \circ p$.

Exercice 2 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et p et q deux projecteurs de E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 3 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p un projecteur de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $p \circ f = f \circ p$ si et seulement si $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont stables par f.

Exercice 4 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et g un projecteur de E. Montrer que :
$$\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker}(g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g).$$
2. Soit f un projecteur de E, et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
$$\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im}(f) \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g).$$
3. Soit g un projecteur, alors $\mathrm{id} - g$ est un projecteur et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im}(\mathrm{id} - g)$, et $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Ker}(\mathrm{id} - g)$.
4. Soit f et g deux projecteurs de E. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si :
$$\operatorname{Im}(f) \cap (\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(g)) \subset \operatorname{Im}(g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

Exercice 5 – **(ESCP 2010)**
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, non réduit au vecteur nul. On note :
$$\mathcal{C} = \{(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2 \mid u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}_E.\}.$$

1. Montrer que :
$$(u, v) \in \mathcal{C} \Longrightarrow \forall \lambda \neq 0, \quad \left(\lambda u, \frac{v}{\lambda}\right) \in \mathcal{C}.$$
Que peut-on déduire sur $\mathcal{C}$? $\mathcal{C}$ est-il un espace vectoriel ?
2. Dans cette question seulement, on suppose que E est de dimension finie n.
   (a) Montrer que l'application tr définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs réelles par :
   $$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, \quad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$
   est une application linéaire.
   (b) Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
   (c) En déduire que $\mathcal{C} = \varnothing$.
3. Soit (u, v) un couple d'endomorphismes de $\mathcal{C}$. Montrer que, pour tout entier $n > 0$:
$$u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1}.$$
En déduire que :
   - ni u ni v ne peuvent être des projecteurs ;
   - ni u ni v ne peuvent être nilpotents (on dit qu'un endomorphisme f est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$)
4. Dans cette question, $E = \mathbb{R}[X]$, et on considère l'application v définie sur E par $v(P) = XP$. Déterminer u tel que $(u, v) \in \mathcal{C}$.

Exercice 6 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2p$, avec $p \in \mathbb{N}$, st soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = p$ et $u^2 = 0$. Comparer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 7 – Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{Ker}\ \ u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, et la suite $(\mathrm{Im}\ \ u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1})$, alors $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^p)$ pour tout $k \geqslant p$. Qu'en est-il de $\mathrm{Im}(u^k)$?
3. Montrer que pour une telle valeur de p, $\mathrm{Ker}(u^p)$ et $\mathrm{Im}(u^p)$ sont supplémentaires dans E.
4. Montrer que la suite $(\dim \mathrm{Ker}\, u^{p+1} - \dim \mathrm{Ker}\, u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En d'autres termes, les sauts de dimension sont de plus en plus petits.
   Indication : Écrire $\mathrm{Ker}\, u^{p+1} = \mathrm{Ker}\, u^p \oplus S$, et montrer que u se restreint en une injection de S dans $\mathrm{Ker}\, u^p$ dont l'image est en somme directe avec $\mathrm{Ker}\, u^{p-1}$.
5. On suppose que u est nilpotent et que $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = 1$. Montrer que pour tout $k \leqslant \dim(E)$, $\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$.

Exercice 8 – Soit A, B, C et B' quatre espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit f, g, f', g' et h des applications linéaires telles que ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & C \\
& B' \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

On suppose en outre que :

(i) $h \circ f = f'$ et $g' \circ h = g$,

(ii) f et f' sont injectives, g et g' sont surjectives,

(iii) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Ker}(g')$.

Le but de l'exercice est de montrer qu'alors h est un isomorphisme.

1. Montrer que pour tout $a \in A$, $g \circ f(a) = 0$ et $g' \circ f'(a) = 0$.
2. **Étude de l'injectivité de** h
   (a) Soit $b \in B$ tel que $h(b) = 0$. Montrer que $g(b) = 0$.
   (b) Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$.
   (c) En calculant $f'(a)$, montrer que $b = 0$ et conclure.
3. **Étude de la surjectivité de** h.
   (a) Soit $b' \in B'$. Montrer qu'il existe $b \in B$ tel que $g(b) = g'(b')$.
   (b) Justifier que $h(b) - b' \in \mathrm{Im}(f')$ puis $h(b) - b' \in \mathrm{Im}(h)$.
   (c) Conclure.

Exercice 9 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^5 = f$. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$.
2. Plus généralement, soit P un polynôme tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P(f) = 0$. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 10 – Soit E un espace de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$. Montrer que le rang de f est 1.

Exercice 11 – **(D'après ESCL 1993)**
Soit E un espace vectoriel réel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E, et id *l'endomorphisme identité de E.*
Pour tout φ de $\mathcal{L}(E)$, on note $\varphi^0 = \mathrm{id}$, $\varphi^1 = \varphi$, et pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$, $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$.
Soient :

- *p et q deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ non nuls et tels que $p+q=\mathrm{id}$,*
- *a et b deux réels distincts et non nuls*
- *f un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $f=ap+bq$ et $f^2=a^2p+b^2q$.*

1. (a) Montrer que $(f-a\cdot\mathrm{id})\circ(f-b\cdot\mathrm{id})=(f-b\cdot\mathrm{id})\circ(f-a\mathrm{id})=0$.
   (b) Montrer que $f-a\cdot\mathrm{id}=(b-a)q$ et que $f-b\cdot\mathrm{id}=(a-b)p$.
   (c) En déduire que $p\circ q=q\circ p=0$
   (d) Montrer que p et q sont des projecteurs de E.
2. Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^n=a^np+b^nq$.
3. (a) Calculer $f\circ\left(\frac{1}{a}\cdot p+\frac{1}{b}\cdot q\right)$.
   (b) Montrer que f est un isomorphisme, et exprimer f^{-1} en fonction de p, q, a et b.
   (c) Exprimer $(f^{-1})^n$ en fonction de p, q, a, b et n.
4. (a) Déterminer l'ensemble S des réels λ tels que $f-\lambda\mathrm{id}$ ne soit pas un isomorphisme (ces valeurs λ sont appelées valeurs propres de l'endomorphisme f)
   On vérifiera que S est constitué de deux réels λ_1 et λ_2.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id})\oplus\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\mathrm{id})=E$ (on dit que f est diagonalisable).

Exercice 12 – Soit φ l'application qui à un polynôme à coefficients réels P fait correspondre le polynôme $\varphi(P)$ défini par la relation $\varphi(P)(X)=P(X+1)+P(X)$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$
2. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{0\}$.
   (b) Que peut-on en déduire sur φ ?
   (c) Démontrer que φ se restreint à $\mathbb{R}_n[X]$ en un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
   (d) En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $E=\mathrm{Ker}(\varphi-2\mathrm{id})$, et F l'ensemble des polynômes s'annulant en 0. On note F_n le sous-ensemble de F constitué des polynômes de F de degré inférieur ou égal à n.
   (a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, F_n est un sous-espace vectoriel de F.
   (b) Montrer que $E=\mathbb{R}_0[X]$.
   (c) Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
   (d) Démontrer que la restriction de $\varphi-2\mathrm{id}$ à F est une application injective. En déduire que la restriction de $\varphi-2\mathrm{id}$ à F_n est un isomorphisme de F_n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (e) Donner une inégalité entre le degré du polynôme P et celui de $(\varphi-2\mathrm{id})(P)$.
4. En déduire qu'il existe une suite de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vérifiant $U_0=1$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n(0)=0$, et $U_n(X+1)=U_n(X)+U_{n-1}(X)$.
   Préciser le degré de U_n et son coefficient dominant.
5. Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}$, $(U_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
6. En utilisant les résultats précédents, montrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(P_n)=2X^n$.
7. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel x, $P_n(1-x)=(-1)^nP_n(x)$.
   (b) En déduire les valeurs de $P_{2n}(0)$, $P_{2n}(1)$ et de $P_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $P_n'=nP_{n-1}$. Calculer P_3, P_4, P_5
   (d) Dresser le tableau des variations des restrictions des fonctions polynomiales P_n à l'intervalle $[0,1]$ (on pourra utiliser une récurrence sur n).

Exercice 13 – Soit E un espace vectoriel de dimension $n\geqslant 2$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p<n$. Soit

$$\mathcal{S}_F=\{H \text{ sev de } F \text{ tq } H\cap F=\{0\}\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_G=\{H \text{ sev de } F \text{ tq } H\cap G=\{0\}\}$$

1. Justifier que $\mathcal{S}_F \cap \mathcal{S}_G \neq \varnothing$.
2. Soit $D = \{\dim H \mid H \in \mathcal{S}_F \cap \mathcal{S}_G\}$. Justifier que D admet un élément maximum, et en déduire qu'il existe dans $\mathcal{S}_F \cap \mathcal{S}_G$ un sous-espace H de dimension maximale.
3. Montrer que $H + F$ et $H + G$ sont des sommes directes, et que $\dim H \leqslant n - p$.
4. On suppose ici que $\dim H < n - p$.
   (a) Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.
   (b) En déduire que $(H \oplus F) \cup (H \oplus G) \neq E$, et qu'il existe un vecteur x de E tel que $x \notin H \oplus F$ et $x \notin H \oplus G$.
   (c) Montrer que $H + \mathrm{Vect}(x)$ est un élément de $\mathcal{S}_F \cap \mathcal{S}_G$.
   (d) En déduire une contradiction.
5. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun

Exercice 14 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $3n$, et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$.

1. Soit g l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathrm{Im}(f), E)$, obtenue par restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ et que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) En déduire que $\mathrm{rg}(g) \leqslant 3n - \mathrm{rg}(f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 3n - \dim(\mathrm{Im}(f) \cup \mathrm{Ker}(f))$
   (c) À l'aide de la formule du rang appliquée à g, montrer que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2n$
2. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 2n$, alors $\mathrm{rg}(f^2) = n$ (on pourra dans un premier temps exprimer $\mathrm{rg}(g)$)
3. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 2n - 1$, alors $\mathrm{rg}(f^2) = n - 1$ ou $\mathrm{rg}(f^2) = n - 2$.

Exercice 15 – On appelle suite exacte la donnée de n espaces vectoriels $V_1, \dots, V_n$ et de $n-1$ applications linéaires $f_i : V_i \to V_{i+1}$ vérifiant en outre que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$, $\mathrm{Im}\, f_i = \mathrm{Ker}\, f_{i+1}$:

$$V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n.$$

En particulier,

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow W \qquad \text{resp.} \qquad V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si f est injective (resp. surjective).

1. Soit $0 \to V_1 \to \cdots \to V_n \to V_n \to 0$ une suite exacte, les espaces V_i étant tous de dimension finie. Montrer que :
$$\sum_{i \text{ pair}} \dim V_i = \sum_{i \text{ impair}} \dim V_i.$$
2. Soit $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$ des espaces vectoriels, et $f, g, h, k, f', g', h', k', p, q, r, s, t$ des applications linéaires entre ces espaces vectoriels :
$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E \\ \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow r & & \downarrow s & & \downarrow t \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{k'} & E' \end{array}$$
   On suppose en outre que les lignes sont exactes, et que le diagramme est commutatif, c'est à dire
$$q \circ f = f' \circ p \ ; \ r \circ g = g' \circ q \ ; \ s \circ h = h' \circ r \ ; \ t \circ k = k' \circ s.$$
   Montrer que :
   (i) si p est surjectif, q et s injectifs, alors r est injectif ;
   (ii) si t est injectif, q et s surjectifs, alors r est surjectif ;
   (iii) Si p est surjectif, t injectif et q et s bijectifs, alors r est un isomorphisme (lemme des cinq).

Exercice 16 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie, et f et g deux endomorphismes dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g).$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.